

לוגיקה למדמ"ח – תרגול 8

דיברנו על סינטקס של שפה מסדר ראשון, והתרגול נרצה להכניס לזה סמנטיקה.

תהי שפה L אשר R^2 סימן יחס בה.
 מה זה R^2 ? השתמשנו בו בתרגול שעבר ומשתמשים בו בהרבה מקומות (2 מציין את האריטי של היחס) -
 זה הוא רק קיצור, הסימון של השפה הוא R . הסימון R^2 זה רק סימון במטא שפה. (זה עם ה-² הוא במטא
 שפה, הסימן היחס הוא באמת R)

נסתכל על:

$$\forall x (\forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x)))$$

נרצה לשאול: מה ערך האמת של הנוסחא הזו?
 זה תלוי בהרבה דברים.

למשל זה תלוי ב- R (אנחנו עדיין לא יודעים מה משעות סימן היחס). ואם היינו נותנים את R זה מספיק?
 האם צריך גם את x, y ? לא כי יש לכל (כלומר לכאורה מספיק רק סימן היחס. לכאורה בגלל המשפט
 הבא). חסרים לנו גם מה הם העצמים שלנו.

כעת נראה מספר דוגמאות.

נניח שהעולם שלנו הוא המספרים הטבעיים ו- R מתפרש כהיחס קטן ממש מ: $<$.
 במקרה הזה הנוסחא שלנו תקבל T .

מה עם העולם שלנו הוא $P(N)$ (הקבוצות החלקיות לטבעיים) והיחס שלנו הוא הכלה: $\subseteq$.
 עכשיו הנוסחא כבר לא נכונה. למה זה לא נכון? כי הקבוצות יכולות להיות שווה.

וכעת: העולם הוא צמתים של גרף לא מכוון. R יתפרש כך:

(a,b) ביחס ל- R אם יש קשת בין a ל- b .

האם כעת זה נכון או לא? לכל שני צמתים - אם יש קשת בין אחד לשני, אז אין קשת בין השני לראשון.
 אז זה לא נכון כי הגרף לא מכוון. (וגם בגרף מכוון זה לא דווקא נכון)

נשים לב להבדל: בשתי הדוגמאות האחרונות קיבלנו F , אבל מה ההבדל? ב- 2 מצאנו איזו שהיא דוגמא
 שעבורם זה לא נכון. ב- 3 אינטואיטיבית אפשר להגיד שזה לא נכון באופן טוטלי, פשוט הטענה לא נכונה
 לאף x ולאף y .

סמנטיקה

אז אנחנו צריכים את המושג של מבנה. נגדיר אותו.

מבנה: זוג סדור $M = \langle D, I \rangle$ כך ש:

1. D קבוצה לא ריקה של עצמים (התחום)

2. I היא פונ' אינטרפרטציה המוגדרת על הסיגנטורה σ כך ש:

$I[c] \in D$	(c קבוע)
$I[R] \subseteq D^n$	(R סימן יחס n-מקומי)
$I[f]: D^n \rightarrow D$	(f סימן פונקציה n-מקומי)

(ודאו שאתם מבינים למה, כלומר למה אנחנו דורשים את זה)

דוגמא

נסתכל על הנוסחא הבאה: $R(x, c)$

במבנה: $M = \langle N, I \rangle$, $I[c] = 5$, $I[R] = \{ \langle x, y \rangle \mid x \neq y \}$. האם הנוסחא נכונה?

היא אומרת x קטן מ-5. אז תלוי בערך של x . חסר לנו מידע - המושג של מבנה לא מספיק כדי להגיד T או F בשביל נוסחא. בתחשיב הפסוקים אם קיבלנו נוסחא והשמה יכולנו. כאן (ב-FOL) צריך לתת לי נוסחא, מבנה והשמה, ורק אז אוכל לענות את השאלה.

השמה

השמה היא פונ' $v: Var \rightarrow D$. (Vars – קבוצת המשתנים)

השמה מורחבת: $v': Terms \rightarrow D$ (Terms - קבוצת שמות העצם) המקיימת:

$v'[x] = v[x]$	(שיהיה כמו במקורי, כלומר זו באמת הרחבה)
$v'[c] = I[c]$	(מה נרצה עבור קבועים? מה שהאינטרפרטציה נותנת)
$v'[f(t_1, \dots, t_n)] = I[f](v'(t_1), \dots, v'(t_n))$	(הפירוש של הפונ' f מופעלת על ה- t_i 'ים)

כעת נוותר על v ונכתוב רק v . (כמו שעשינו בתחשיב הפסוקים)

א-וריאנט

הגדרה: א-וריאנט של v : השמה v' הזהה ל- v פרט אולי לערך שהיא מתאימה ל- x .
(ה"אולי" - חשוב מאוד! חשוב להבין שכל השמה היא א-וריאנט של עצמה לכל x)

אנו משמיעים לעיתים את המושגים: טאוטולוגיה, הנוסחא הזו נכונה וכו' בניגוד לתחשיב הפסוקים יש כאן המון ניואנסים קטנים שאפשר להגיד על הנוסחא לגבי ערך האמת שלה. ההגדרות מאוד חשובות וחשוב להבין אותם (במבחן הקודם היו עשרות טעויות כאלה).

יחס הסיפוק

נתחיל עם הגדרה עבור סיפוק של שמות עצם:

$$\langle v[t_1], \dots, v[t_n] \rangle \in I[p] \Leftrightarrow M, v \models p(t_1, \dots, t_n)$$

אז מה זה מספק? תחת המבנה הזה וההשמה הזו - הערך מקבל T .

כעת המשיך ההגדרה באינדוקציה:

$$\begin{array}{ll} M, v \models A & \Leftrightarrow M, v \models \neg A \\ M, v \models B \text{ או } M, v \models A & \Leftrightarrow M, v \models A \vee B \\ M, v \models B \text{ ו } M, v \models A & \Leftrightarrow M, v \models A \wedge B \\ M, v \models B \text{ או } M, v \models A & \Leftrightarrow M, v \models A \rightarrow B \\ M, v' \models A : v \in v' \text{ א-וריאנט } v' & \Leftrightarrow M, v \models \forall x A \\ M, v' \models A : \exists v \in v' \text{ א-וריאנט } v' & \Leftrightarrow M, v \models \exists x A \end{array}$$

נבין את הדיוקים הקטנים:

- מה זה אומר להגיד שנוסחא ספיקה? קיים מבנה וקיימת השמה שבהם היא מתספקת (מקבלת ערך T) - זו ספיקות.

- מה זה אומר להגיד ש- A תקפה במבנה M ? זה אומר שלכל השמה v : $M, v \models A$.
- מה זה אומר להגיד ש- A תקפה לוגית? ש- A תקפה בכל מבנה.

ושוב:

להגיד שמהשוו ספיק צריך גם מבנה וגם השמה. תקף במבנה זה לכל השמה במבנה הזה. תקף לוגית זה לכל מבנה ולכל השמה.

תהיה לגבי תקפות לוגית

איך יכול להיות משהו שתקף בכל מבנה? לכאורה תמיד אני אוכל לבנות מבנה שלא יאפשר לו. אז לא, מיד נראה.

כעת נחזור לדוגמאות שראינו במהלך השיעור ונראה מה נוכל להגיד עליהן.

- לגבי הדוגמא של $\forall x (\forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x)))$: היא תקפה במבנה הראשון (הטבעיים) ש- R הוא "קטן מ" (כי זה לא משנה מה ההשמה).

- לגבי הדוגמא של $R(x,c)$ עם אותו מבנה שהצגנו: הנוסחא הזו ספיקה במבנה הזה. כי אפשר למצוא השמה (לדוגמא $x=1$), אבל היא לא תקפה במבנה הזה - כי יש השמות שיתנו לה F. במבנה שנראה בדוגמא הבאה, זה דווקא כן יהיה תקף.

דוגמא

נסתכל שוב על $R(x,c)$, אך הפעם נגדיר מבנה שנראה כך:

$$M = \langle D, I \rangle, \quad D = \{1\}, \quad I[c] = 5, \quad I[R] = \leq$$

כעת ההשמה היחידה שיכולה להיות נותנת ל-x אחד, ואז זה יהיה תקף במבנה.

לשים לב! להגיד תקף לבד זה חסר משמעות, צריך להגיד תקף באיזה מבנה.

הערה

כשאנחנו רושמים $I[R] = <$ (כלומר להגיד שסימן היחס R הוא "קטן מ") זה גם קיצור, אנחנו הגדרנו

את זה כ-חיות או במקרה הזה זוגות סדורים (יחס דו מקומי), היינו צריכים לכתוב: $\{(x,y) \mid x < y\}$.

קבוצת המשתנים החופשיים

כמו כל דבר שאנחנו מגדירים בלוגיקה מסדר ראשון זכריך גם עבור שמות עצם וגם עבור נוסחאות (כי זה 2 קטגוריות שונות)

עבור ש"ע:

$$\begin{aligned} F_v[x] &= \{x\} \\ F_v[c] &= \emptyset \\ F_v[f(t_1, \dots, t_n)] &= F_v(t_1) \cup \dots \cup F_v(t_n) \end{aligned}$$

עבור נוסחאות:

$$\begin{aligned} F_v(p(t_1, \dots, t_n)) &= F_v(t_1) \cup \dots \cup F_v(t_n) \\ F_v(\neg A) &= F_v(A) \\ F_v(A \circ B) &= F_v(A) \cup F_v(B) \end{aligned}$$

דוגמא

$$\forall x (p(x, y) \rightarrow \exists y R(y))$$

$\downarrow$ קטור $\downarrow$ חסוי $\downarrow$ קטור

מה אנחנו אומרים לגבי המשתנים?

$$\forall x (p(x, y) \rightarrow \exists y R(y))$$

נסתכל על:

ואז נשים לב למעשה מה שחופשי זה ההופעות של המתשנים ולא המשתנים עצמם, וזה מידע שאנחנו מאבדים בהגדרה שהגדרנו.

הגדרה: אם $F_v(t) = \emptyset$ אז t נקרא שם עצם סגור.

בגלל שבש"ע לא יכולים לבוא כמתים, אז אין בו משתנים בכלל. יש בו קבועים ופונ' שמופעלות על קבועים. (וזה לא קבוע [לגבי הפונ'] - כי זה תלוי במבנה).

לתשומת לב: $f(c)$ הוא גם סימן בשפה. מבנה יתן ל- $f(c)$ איבר מהתחום, וזה כבר במטא שפה. (התחום זה במטא שפה)

הגדרה: אם $F_v(A) = \emptyset$ אז A פסוק.

זו הגדרה מאוד חשובה - מה היא אומרת? בתחשיב הפסוקים נוסחא ופסוק זה אותו דבר - פה יש הבדל מהותי. כלל הביטויים (כלומר המקרה הכללי) זה נוסחאות. תת קבוצה של זה היא קבוצת הפסוקים - הם נוסאות שאין בהן מתשנים חופשיים.

דוגמא: הנוסחא הראשונה שראינו $(\forall x (\forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))))$.

לגבי פסוקים - ערך האמת שלהם תלוי רק במבנה, כי אם אין משתנים חופשיים ההשמה לא מעניינית, ולכן כשמדובר בפסוק - המושג של ספיקות ותקפות במבנה הוא אותו המושג (כי אין משמעות להשמה).

תרגיל

האם A תקפה לוגית?

$$1. A = \forall x \psi(x) \rightarrow \exists x \psi(x)$$

[בשיעור אנחנו כותבים פ' ולא פ' של x, כאן זה סימון שאומר שבפ' x מופיע חופשי - זה לא אומר שדברים אחרים לא חופשיים, לכן כל הנוסחא הזו היא לאו דווקא פסוק]

היא תקפה לוגית! נניח בשלילה שקיים מבנה M והשמה v כך ש: $M, v \models A$. בגלל קשר הגרירה:

$$\begin{array}{lcl} M, v \models \forall x \psi(x) & \text{ואם} & M, v \models \exists x \psi(x) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{ב- } x \text{ (ראו): } v, x \models \psi(x) & \text{בפ' } x \text{ (ראו): } v, x \models \psi(x) & \\ \text{בגלל קשר הגרירה: } M, v' \models \psi(x) & & M, v' \models \psi(x) \end{array}$$

(זו הייתה צורה אחת להוכיח, ב- 2 נראה דרך אחרת)

2. פסוק הבא: $A = \exists x (\varphi(x) \rightarrow \forall x \varphi(x))$.

אינטואיטיבית זה אומר שתמיד קיים יחיד שמעיד על הכלל. גם תקפה לוגית! נראה הפעם לא בשלילה.

יהי M מבנה כל שהוא ו- v השמה כלשהיא.

אם $M, v \models \forall x \varphi(x)$ אז $M, v \models \varphi(x) \rightarrow \forall x \varphi(x)$. אז קיים x -וריאנט של v (הוא עצמו!) המספק את $\varphi(x) \rightarrow \forall x \varphi(x)$ ולכן:

$$M, v \models \exists x (\varphi(x) \rightarrow \forall x \varphi(x)) \quad (=A)$$

מצד שני, אם $M, v \not\models \forall x \varphi(x)$ אז קיים x -וריאנט v' של v כך ש: $M, v' \not\models \varphi(x)$. אבל אז $M, v' \models \varphi(x) \rightarrow \forall x \varphi(x)$ ולכן:

$$M, v \models \exists x (\varphi(x) \rightarrow \forall x \varphi(x)) \quad (=A)$$

3. הנוסחא $\forall x (\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow \forall x \varphi \vee \forall x \psi$.

זה לא תקף לוגית, כלומר זה לא נכון בכל מבנה וכל השמה. כדי להראות זאת צריך למצוא מבנה והשמה כדוגמא נגדית. בגלל שזה פסוק, מספיק לנו למצוא מבנה (ודאו שברור לכם למה!):

$$\begin{aligned} M &= \langle \mathbb{N}, I \rangle \\ n \in I[\varphi] &\Leftrightarrow 2 \nmid n \\ n \in I[\psi] &\Leftrightarrow 2 \mid n \end{aligned}$$

עוד דוגמא נגדית (מעולמות סופיים):

$$\begin{aligned} M &= \langle \{1, 2\}, I \rangle \\ I[\varphi] &= \{1\} \\ I[\psi] &= \{2\} \end{aligned}$$

תיקון! במקום φ ופסי אמור להיות P ו- Q כדי להבטיח שהם פסוקים! כלומר שאין שם עוד משתנים חוץ מ- x . אם אומרים $P(x)$ או $R(x)$ אז יש שם רק את x . (כי הם סימני יחס שמופעלים על x)

תרגיל

אם x לא מופיע חופשי ב- A , הוכח שלכל M ו- v :

$$M, v \models \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$$

מה בעצם שאלנו? פשוט מבקשים להוכיח שהנוסחא הזו תקפה לוגית.

הוכחה

נניח בשלילה כי $M, v \not\models \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$, אז:

$$\begin{array}{l} \textcircled{\star} M, v \models \forall x (A \rightarrow B) \quad \text{ומ} \quad M, v \not\models A \rightarrow \forall x B \\ \downarrow \\ M, v \models A \quad \text{ומ} \quad M, v \not\models \forall x B \\ \downarrow \\ \text{קיום } x - (v, x) : \\ M, v \models A \quad \text{ומ} \quad M, v \not\models B \\ \text{(כי } x \notin Fv(A) \text{)} \quad \text{אז} \quad M, v' \models A \quad \text{ומ} \quad M, v' \not\models B \\ \text{לכן} \quad M, v' \not\models A \rightarrow B \\ \text{סתירה!} \end{array}$$

הסתירה בסוף היא כיוון שמצאנו השמה v' שהיא x -וריאנט של v שלא מספקת את $A \rightarrow B$, וזאת בסתירה

ל- $\textcircled{\star}$.