

לוגיקה למדמ"ח – שיעור 8

התחלנו בשיעור שעבר לוגיקה מסדר ראשון. הספקנו לעשות את החלק הסינטקטי הטהור השפה: א"ב, שמות עצם ונוסחאות. התחלנו מעט את הנושא של הסמנטיקה (ממש סוף שיעור שעבר) ועליו נדבר השיעור.

סמנטיקה - לתת משמעות לדברים. היא בעיקר מתבטאת בשאלה מתי משהו הוא נכון ומתי לא, במקרה זה המשהו זה הנוסחאות (לא אומרים על שמות עצם אם הם נכונים או לא).

תחילה - כמה שאלות מקדימות (הבנת המושג "נכון")

שאלה 1

נניח שאנו עובדים במספרים הממשיים. האם הנוסחא הבאה נכונה:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

נשים לב שזה לא בדיוק לפי כלל הסיגנטורה, אלא יש כאן שימוש בסוכר תחבירי. מה שהיינו צריכים לכתוב זה:

$$= \left(* \left(+ (1, x), + (1, x) \right), + \left(+ (* (x, x), * (2, x)), 1 \right) \right)$$

(* זה כפל כאן). למעשה גם ה-1 לא אמור להיות כאן ואנו אמורים לכתוב $S(0)$. אבל די יש גבול...

בחזרה לשאלה המרכזית: אז האם זה נכון?
את התשובה היא שכן, היא נכונה.

שאלה 2

והאם זאת נכונה (עדיין בממשיים)?

$$(x+1)^2 = x+1$$

אז עולות בכיתה 2 תשובות:

1. תלוי
2. לא

שאלה 3

האם:

$$2x + 1 = 7$$

ומה כאן? אותן תשובות כמו עבור השאלה השניה. (אין הבדל מהותי ביניהן)

שתי התשובות האלו (תלוי ולא) נכונות. כי זה תלוי במובן שאנחנו נותנים למילה "נכון".

בבית הספר אנו משתמשים במושגים:

1. זהות
2. משוואה

שניהם נכתבים אותו דבר (ואין שימוש בכמתים לכל וקיים) והדרך לדעת למה הכוונה זה לפי ההקשר (נניח משוואה משתמשים ב- x, y, z וזהויות ב- a, b, c)

אז אם נצהיר על זה (שתי השאלות האחרונות) כזהות - אז זה לא נכון (כלומר הצהרה שזה נכון לכל הצבה). אם נתייחס לזה בתור משוואה, אז יש מקרים שהיא נכונה ויש מקרים שלא. ואז תלוי - הכוונה תלוי בערך שאנחנו נותנים ל- x .

אז יש 2 מובנים למילה "נכון" שאנחנו צריכים להבדיל ביניהם.

נביעה כאן תהיה דומה לאיך שהגדרנו בתחשיב הפסוקים - אם כל מודל של T הוא מודל של ϕ אז מ- T נובע ϕ . (מודל יגדיר לנו את מה שאנחנו מתכוונים במובן "נכון")

נחזור שוב לשאלות שלנו, ונשאל האם:

$$\begin{array}{l} (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad \vdash \quad (x^2+1)^2 = (x^2)^2 + 2x^2 + 1 \\ 2x + 1 = 7 \quad \vdash \quad x = 3 \\ 2x + 1 = 7 \quad \vdash \quad 2x^2 + 1 = 7 \end{array}$$

[כתבנו פה את סימן הנביעה, באופן לא פורמלי]

מה לגבי השאלה הראשונה? (שוב - עוד אין לנו הגדרות, בינתיים רק אינט', אחרי זה נפרמל הכל) אז כן.

מה לגבי השני?

אז כן. בתיכון אנחנו בהחלט מסיקים את זה (וקוראים לזה פתירת משוואות).

לשלישי - האם בתיכון מהעובדה ש- $2x + 1 = 7$ אנחנו מסיקים ש- $2x^2 + 1 = 7$?

אז למה בראשון כן ובשלישי לא?

אם היינו מתכוונים בסימן הנביעה באותו מובן, בשניהם היינו צריכים לקבל את אותה התשובה עבור שניהם. אז אם באחד אנו כן עושים ובשלישי לא, הכוונה בסימן הנביעה היא שונה בכל אחד.

וכמו בתיכון אנו צריכים להבדיל בין זהויות למשוואות, וכשמבלבלים בהם יש טעויות...

נזכר שאמרנו בהתחלה שמדברים על ממשיים, לא סתם אמרנו. זה כי קודם כל צריך תחום. כמו כן צריך פירוש לאותם סימנים שהם לא משתנים. וזה מה שהתחלנו בשיעור שעבר. מיד נחזור לזה.

המושג הטכני להצבה של x הוא השמה. שוב - מיד נראה הכל פורמלי.

מבנה

הגדרה:

תהי σ הסיגנטורה של שפה L . (סיגנטורה זה הרשימה של מה שדיברנו עליו שיעור שעבדו- L זה כל המבנה - ש"ע, הנוסחאות וכו'. יתכנו ספרים שלא יבדילו ביניהם).

- מבנה עבור σ (יש כאלה שירשמו "מבנה עבור L" ואנחנו גם נגיד לפעמים) הוא זוג $\langle \sigma, D \rangle$ שבו:
- א. D קבוצה לא ריקה. זה כל מה שמניחים עליה. במקרה שלנו לקחנו את קבוצות הממשיים.
 - ב. I היא פונ' ("פונקצית פירוש") שתחומה σ ומקיימת את התנאים הבאים:
[האלמנטים של סיגמא מתחלקים לשלוש סוגים: קבועים סימני פונ' סימני יחס. לכן תהיה לנו חלוקה]
1. $I[c] \in D$. אם c קבוע, היא תתן איבר ב- D . למשל שדיברנו על השאלה הראשונה, 1 (השרטוט של חצי חץ מופנה כלפי מעלה) כולנו הבנו שמדובר על המספר המופשט אחד.
 2. $I[f] \in D^n \rightarrow D$ (n זה ה- arity של f). הסימן f הוא סימן פונ' אבל הפירוש שלו הוא באמת פונקציה! שזה משהו מופשט - קבוצה של זוגות (או שלושת עבור פונ' מ-2 משתנים וכו').
 3. $I[p] \subseteq D$. זה עבוד p סימן יחס (n-מקומי) של σ . (כלומר: $I[p] \in P(D^n)$ כש- P השני הוא קבוצת החזקה)

סימני קיצור:

$$\begin{aligned} I[c] &\rightarrow c^I \\ I[f] &\rightarrow f^I \\ I[p] &\rightarrow p^I \end{aligned}$$

(חץ מסמל פה "יקוצר באמצעות")

אז כעת $+^I$ זה סימן במטא שפה שמסמל את המשמעות / פירוש של הסימן פלוס של השפה (הסימן הגרפי). פלוס הוא בשפה, זה במטא שפה.

עד כאן בקשר למבנה.

השמה

יהי $M = \langle D, I \rangle$ מבנה עבור שפה L מסדר ראשון. השמה ב- M היא פונ' מקבוצת המשתנים אל D .
בדרך כלל נסמן השמות באות v (עם אינדקסים אם צריך).

דיון על ההגדרה

אפשר לשאול - למה צריך שהשמה צריך שתהיה פונ' מכל המשתנים. אינט' - כדי להחליט אם נוסחא או לא, אז כשאומרים שזה תלוי בערך של המשתנים, הכוונה רק למשתנים (ואפילו רק החופשיים) שמופיעים בנוסחא. למה צריך לתת לכולם? התשובה היא פשוטה - עניין של נוחיות בהגדרות. יש גירסאות שזו פונ' שנותנת ערכים לחלק מהמשתנים. יתברר לנו (כמו בתחשיב הפסוקים) שמה שקובע נכונות או אי נכונות, כלומר מה שרלוונטי, זה מה ש- v נותנת למשתנים המופיעים בנוסחא (נכתוב בעתיד בצורה מפורשת).

וטיעון בעד!

השמה בשפות אינפרטיביות היא state (המצב הנתון) - ערך של כל המשתנים ברגע נתון של ריצת התכנית. יש מימושים שברירת מחדל כל המתשנים מסוג ממשי מקבלים 0 (ועדכונים באים אחד כך) - במימושים כאלה זה נוח להשתמש בהגדרה שלנו.

אז יש השמה, יש מבנה, וכעת נוכל להתחיל לדבר על נכונות של נוסחאות. את זה נעשה בצורה אינדוקטיבית.

נכונות ותקפות – שני יחסים

כמו בתחשיב הפסוקים, יש לנו סיפוק של נוסחא באיזה שהוא מבנה. היה לנו יחס שסימנו אותו כך: $\models$, כמשצד ימין היו נוסחאות ומצד שמאל היו מבנים. ושוב נגיד "זה מסתפק על ידי...", או "זה מהווה מודל של..." וכו'.

את יחס הנכונות נסמן ב- $\models$, שזה מה שניתן במשוואות (כלומר בשאלות השניה והשלישית מתחילת השיעור)

נכונות תלויה ב- 2 דברים:

1. באיזה מבנה מדובר
2. ביחס לאיזה השמה

אז זה יראה בצורה הבאה: $M, v \models \varphi$, ואז נוכל להשמיט את האות הקטנה t , כי שיש שני דברים מצד שמאל הכוונה ליחס הנכונות.

תקפות (validity) [כלומר היחס שאנו רוצים עבור זהויות] תהיה יחס אחר $(\vDash)$, אותו נראה בהמשך.

הגדרת נכונות

יחס הנכונות $\models$ (למעשה נסמן אותו מעכשיו ב- $\models$) בין נוסחאות בשפה L וזוגות $\langle M, v \rangle$ בהן M הוא מבנה עבור L ו- v היא השמה בו, מוגדר באופן הבא:

(נתחיל כמובן עם נוסחאות אטומיות ואז נרחיב את ההגדרה)

עבור נוסחאות אטומיות

איך נראית נוסחא אטומית?

p סימן יחס n -מקומי של השפה, ונוסחא אטומית היא: $p(t_1, \dots, t_n)$. נראה מתי זה נכון ב- $\langle M, v \rangle$, כלומר מתי: $M, v \models p(t_1, \dots, t_n)$. זה יקרה אם ורק אם:

$$\langle v[t_1], v[t_2], \dots, v[t_n] \rangle \in I[p]$$

מה הבעיה שיש לנו? ("אם אין לכם בעיה פה עם מה שכתבתי אז יש לכם בעיה")
לא הגדרנו מה זה $v[t_i]$. מה זה v ? v נותנת ערך למשתנים ו- t_i זה ש"ע. אם היה כתוב
זה היה בסדר. $\langle v[x_1], \dots, v[x_n] \rangle$

לכן צריך קודם להגדיר את v עבור שמות עצם.
לכן תחילה נגדיר איך v תורחב עבור שמות עצם. זה דומה למה שעשינו בתחשיב הפסוקים - שם ההשמות נתנו ערכים לפסוקים האטומיים והרחבנו איך הם נותנים לשאר הנוסחאות. רק כשכאן אנחנו מרחיבים את זה לשמות עצם ולא לנוסחאות.

השלמת ההגדרה:

- הערך $v[t]$ ש- v נותנת לש"ע t מוגדר באופן הבא: (שוב אינ' - כהגדרת ש"ע)
1. (בסיס) יש לנו 2 סוגים של ש"ע בסיסים - המשתנים והקבועים.
- אם c קבוע אז $v[c] = I[c]$ (כלומר לא תלוי בהשמה, המובן שלו הוא תמיד אותו מובן, שמתקבל לפי המבנה).
- אם t הוא משתנה $v[t]$ כבר מוגדר. (אנחנו מרחיבים את ההגדרה הזו)
2. (מעבר לש"ע יותר מורכבים) אם: $t = f(s_1, \dots, s_k)$ כאשר f סימן פונ' k -מקומי ו- $s_1, \dots, s_k$ ש"ע ("יותר פשוטים") אז (נקח את הפירוש של f ולהפעיל על הפירושים שיש לנו):

$$v[t] = f^I[v[s_1], \dots, v[s_k]]$$

נזכר שוב איך אנחנו מבדילים בין דבר במטא שפה ובמטא. סוג הסוגריים. נזכרנו.
כשהיה לנו x^{2+1} זה בדיוק מה שעשינו, קיבלנו את x עבור הצבה מסויימת ופיתחנו את זה עד ל- x^{2+1}
(כלומר הפעלנו את פונ' שמהווה את המשמעות של הסימן * [היא פונ' הכפל] ואז הפעלנו את הפונ' שמהווה את

המשמעות של הסימן + [היא פונ' החיבור]

אז מה היה לנו כאן?

היה מבנה והשמה, וראינו מה הערך ש- v נותנת לכל שם עצם. לפי זה הוגדר מתי נוסחא אטומית נחשבת לנכונה.

ואחר שכידועים מתי נוסחא אטומית מורכבת, אפשר לעבור לנוסחאות מורכבות יותר.

ההרחבה עבור נוסחאות מורכבות

ההרחבה:

$M, v \models \neg \varphi$	אם	$M, v \models \varphi$
$M, v \models \varphi \wedge \psi$	אם	$M, v \models \varphi$ ו- $M, v \models \psi$
$M, v \models \varphi \vee \psi$	אם	$M, v \models \varphi$ או $M, v \models \psi$
$M, v \models \varphi \rightarrow \psi$	אם	$M, v \models \varphi$ אז $M, v \models \psi$
$M, v \not\models \varphi$	אם	$M, v \models \varphi$

וכעת מה לגבי $M, v \models \forall x \varphi$?

היינו כמובן רוצים הגדרה מהצורה:

$$M, v \models \forall x \varphi \text{ אם } \forall a \in D, M, v \models \varphi \{a/x\}$$

אבל יש איתה בעיה...

כי a הוא איבר ב- D , לא משהו בשפה, ולכן אי אפשר להציב אותו. זה עלול לצאת לא נוסחא של השפה - כי איברים ב- D לא שייכים לשפה. ולכן ההצבה הזו היא חסרת מובן.

איך אפשר להתמודד עם הבעיה?

1. להעמיד פנים כאילו. להוסיף לשפה קבועים עבור על אחד ואחד מהאיברים של D . יש ספרים שעושים את זה. הרוב המכריע עושה משהו אחר (פתרון 2).
2. איך שאנחנו נעשה. (עמוד הבא)

נגדיר רגע מושג עזר טכני:
הגדרת עזר: השמה v' נקראת x -וריאנט של השמה v אם
 $v[y] = v'[y]$ עבור כל $y \neq x$.

כעת, נמשיך את הגדרת $\models$ עבור המקרים ה"בעייתיים":

$M, v \models \forall x \varphi$ אם לכל x -וריאנט v' של v מתקיים $M, v' \models \varphi$.

$M, v \models \exists x \varphi$ אם קיים x -וריאנט v' של v כך ש- $M, v' \models \varphi$.

משתנה חופשי ומשתנה קשור

נרצה כעת להגדיר מה זה משתנה חופשי קשור וחופשי (למעשה המופעים הם קשורים או חופשיים, כי משתנה יכול להופיע פעם אחת קשור ופעם אחת חופשי).

הגדרה: מופע של משתנה בנוסחא הוא חופשי אם:

1. כל מופע של משתנה בנוסחא אטומית הינו חופשי בנוסחא זו.

אזהרה: זה נכון לשפה מסדר ראשון. אפשר ליצור שפות שאפשר לקשור בן דברים בתוך ש"ע, אנחנו לא עושים את זה. בנוסחא:

$$F_v[p(t_1, \dots, t_n)] = \bigcup_{i=1}^n F_v[t_i]$$

תזכורת:

$F_v[E]$ היא קבוצת המשתנים החופשיים של E .

עבור שם עצם t , $F_v[t]$ הוא פשוט קבוצת המשתנים המופיעים ב- t . (גם כאן היינו צריכים להגדיר באופן אינדוקטיבי על מבנה שם העצם, אבל ברור אין אמורים לעשות את זה)

2. מופע חופשי של משתנה בפי' או בפסי' הוא גם מופע חופשי של אותו משתנה ב- $\varphi \wedge \psi$ ולהיפך (להיפך

- אם משתנה מופיע חופשי $\varphi \wedge \psi$ אז הוא מופיע באחד מהם, ובאחד הזה הוא חופשי. מסדור: מופע חופשי של x במסגרת $\varphi \wedge \psi$ הוא או מופע חופשי של x במסגרת פי' או מופע חופשי שלו במסגרת פסי'). בנוסחא:

$$F_v[\varphi \wedge \psi] = F_v[\varphi] \cup F_v[\psi]$$

למעשה הנוסחא לא מתארת את אותו דבר שאמרנו במילים. כי אנחנו דיברנו על מופעים והנוסחא הזו מתארת את המשתנים החופשיים. יתכן מצב שאותו משתנה מופיע באחד חופשי ובאחד לא, והוא עדיין יופיע בקבוצת המשתנים החופשיים (וזו פחות מידע מאשר מה שאנחנו תיארו במילים).

כנ"ל עבור שאר הקשרים.

3. מופע חופשי של משתנה x בנוסחא מהצורה $\forall y \varphi$ הוא מופע חופשי שלו בפי, אלא אם כן $y=x$ ואז אין ל- x מופעים חופשיים ב- $\forall y \varphi$. כנ"ל לגבי $\exists y \varphi$. בנוסחא:

$$F_v[\forall x \varphi] = F_v[\varphi] - \{x\}$$

(חיסור בין קבוצות. והחיסור עושה משהו רק אם x בכלל היה בנוסחא. למעשה אפשר עכשיו לשים לב שאנחנו מסיכים לנוסחאות מהצורה: $\forall x 0=0$)

הגדרה: מופע של משתנה x בנוסחא פי שאינו חופשי נקרא קשור.

כשאר משתנים חופשיים נכונות הנוסחא אינו תלויה ב- v אלא רק ב- M . מיד נראה זאת. (למה הבאה)

הגדרה: פסוק הוא נוסחא ללא משתנים חופשיים. במילים אחרות: פי פסוק אם $F_v[\varphi] = \emptyset$.

למה

אם $v_1[x] = v_2[x]$ לכל $x \in F_v[\varphi]$ אז: $M, v_1 \models \varphi$ אם ורק אם $M, v_2 \models \varphi$.

הוכחה: (לא מלאה)

כמובן שתעשה על אינדוקציה של המבנה של פי.

נניח פי אטומית, כלומר $\varphi = p(t_1, \dots, t_n)$ (כאשר p סימן יחס n -מקומי ו- $t_1, \dots, t_n$ הם ש"ע. אנחנו לאט לאט נפסיק לכתוב את זה [בגלל זה זה בסגוריים] - אבל במבחן אסור לשכוח את זה!). אז:

$$\begin{aligned} M, v_1 \models \varphi &\iff \langle v_1[t_1], \dots, v_1[t_n] \rangle \in I[p] \\ M, v_2 \models \varphi &\iff \langle v_2[t_1], \dots, v_2[t_n] \rangle \in I[p] \end{aligned}$$

נרצה להראות שזה אותה ח-יה ואז זה יהיה ברור. לכך נצטרך למת עזר.

זה סטנדרטי שכאשר מנסים להוכיח משהו עם נוסחאות צריך להוכיח קודם משהו על שמות העצם (כבר היה לנו קודם בשיעור, כהשרחבנו את ההגדרה של השמה עבור שמות עצם)

בצורה מסודרת (נניח במבחן) עדיף להתחיל עם למת העזר ורק אז להתחיל את הוכחת הלמה.

למת עזר

אם $v_1[x] = v_2[x]$ לכל $x \in F_v[t]$ אז (ש"ע) $v_1[t] = v_2[t]$.

מבחינה מהותית, v "משפיעה" רק על המשתנים החופשיים.

הוכחת למת העזר: באינדוקציה על מבנה t . (מושאר כתרגיל)

חזרה להוכחה:

לפי למת העזר $\langle v_1[t_1], \dots, v_1[t_n] \rangle = \langle v_2[t_1], \dots, v_2[t_n] \rangle$, ולכן

$$\langle v_1[t_1], \dots, v_1[t_n] \rangle \in I[p] \Leftrightarrow \langle v_2[t_1], \dots, v_2[t_n] \rangle \in I[p]$$

למרות ש- v צריך לתת השמה לאינסוף משתנים, אנחנו נגיד כאשר נגדיר אחת כזו - מה היא עושה רק למשתנים הרלוונטים לנו (עבור משתנים אחרים זה לא משנה לנו).

מסקנה מהלמה

אם $\mathcal{M}, v \models \varphi$ אז לכל השמה מתקיים: $\mathcal{M}, v' \models \varphi$ אם v' כן ש: $\mathcal{M}, v' \models \varphi$.

במילים אחרות: פסוק φ - או שהוא נכון בכל ההשמה או שהוא לא נכון באף השמה. (בגלל שאין משתנים חופשיים, כלל ההשמות מסכימות עליהם)

לכן אפשר לשאול על פסוק האם הוא נכון במבנה $\mathcal{M}$ או לא (מבלי להתייחס להשמה).

"בחמש דקות אפשר להרביץ 3 הגדרות ביום טוב"

- ארנון אברון, חמש דקות לסיום השיעור

הגדרות:

1. נוסחא פ' נקראת תקפה במבנה M (סימון: $M \models \varphi$ או $M \vDash \varphi$) [ונזכור שנבדיל בין זה לנכונות לפי מספר הדברים שנמצאים משמאל לסימן היחס] אם לכל השמה v מתקיים: $M, v \models \varphi$. זו ההקבלה למושג הזהות מהתיכון.

2. נוסחא נקראת תקפה לוגית אם היא תקפה תקפה בכל מבנה (כלומר לכל M ולכל v מתקיים: $M, v \models \varphi$)

בשיעור הבאה נגדיר מה הוא יחס הנביעה.