

לוגיקה למדמ"ח – תרגול 12

נתחיל לדבר על מבנה הרברנד שזה דבר חשוב ויעיל ושימושי. בהתחלה זה יכול להיות לא הכי מובן, ננסה לעשות קצת סדר.

מבנה הרברנד: מבנה עבור שפה L שבה יש לפחות קבוע אחד, $M = \langle D, I \rangle$ כך ש: $D = H(L)$ - קבוצת הש"סים של L (ש"ס - ש"ע שאין בו משתנים, רק קבועים וסימני פונקציה). לכן אנחנו רוצים לפחות קבוע אחד כי אם לא התחום יהיה ריק. עד סוף התרגול כשנגיד שפה, נניח שיש בה לפחות קבוע אחד.

$I[c] = c$ - לא להתבלבל, זה לא חסר משמעות. כאן התחום הוא הש"סים, וזה אומר שפירוש של כל ש"ס הוא עצמו.

$I[f][s_1, \dots, s_n] = f(s_1, \dots, s_n)$ - כאשר $s_1, \dots, s_n$ הם ש"סים. הפירוש של $f(a)$ יהיה בדיוק f סוגריים a - כי זה כגוש איבר בתחום שלנו. הוא לא יהיה נגיד 7 כתוצאה אלא ממש f סוגריים a .

נשים לב שכל השמה יכולה לתת למשתנים רק ש"סים (כי זה התחום שלנו). כמו כן, יש לי בתחום כמויות של תוצאות אפשריות של כל פונקציה (בדר"כ).

משפט הרברנד: תהי T תורה אוניברסלית בשפה L בעלת לפחות קבוע אחד. אז: $T^* \text{ ספיקה} \Leftrightarrow T \text{ ספיקה}$, כאשר T^* היא קבוצת האינסטנסיות הסגורות של המטריצות של איברי T .

מה זה פסוק אוניברסלי?

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

וזו המטריצה:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \underbrace{\varphi(x_1, \dots, x_n)}_{\text{המטריצה}}$$

קבוצת האינסטנסיות הם כל ההצבות של ש"סים לתוך המשתנים. למשל יש לנו את $\forall x P(x)$ אז קבוצת האינסטנסיות: $\{P(c), P(a), \dots\}$. כל ההצבות של ש"סים במטריצה של הנוסחא.

הוא נותן איזה שהיא רדוקציה - הוא אומר יש פסוק אתה רוצה לבדוק האם הוא ספיק? תסתכל על קבוצת האינסטנסיות ותבדוק האם היא ספיקה.

תרגיל

הוכח או הפרך:

אם פסוק פסיק אז הוא ספיק במבנה הרברנד.
לא נכון?

נסתכל על $\exists x R(x) \wedge \neg R(c)$.

כעת השפה כאן היא $L = \{c, R\}$ (בצורה לא פורמלית).

הוא ספיק (למשל התחום יהיה הטבעיים R זוגי וכו'). אבל נסתכל על מבנה הרברנד: $D = H(L) = \{c\}$ ובו הוא לא ספיק. זה כי יש לנו איבר יחיד.

כשמגדירים פסוק כבר מגדירים חלק מהשפה, כי אם יש בו קבועים או סימנים הם צריכים להיות חלק מהשפה.

טענה מתוקנת: אם פסוק אוניברסלי ספיק, אז הוא ספיק במבנה הרברנד. וזה כבר נכון!

מה זה אומר שפסוק אוניברסלי פסיק? נניח ש:

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$$

מה זה אומר שהוא ספיק? לפי משפט הרברנד, זה אומר ש- $\{\varphi\}^*$ (קבוצת האינסטנסיית של המטריצה שלנו) היא ספיקה, נניח ב- M והשמה v . נרצה להוכיח שיש מבנה הרברנד שהוא גם מודל עבור הדבר הזה. נבנה מבנה הרברנד באופן הבא. אז התחום לא נתון לפרשנות וכו"ל לקבועים ולפונקציות. כלומר אוטומטית (מזה שזה צריך להיות מבנה הרברנד:

$$D = H(L)$$

$$I[c] = c$$

$$I[f][...] = \dots$$

מה נשאר לנו להגדיר כדי שזה יהיה מבנה? את סימני היחס! נגדיר:

$$M, v \models R(s_1, \dots, s_n) \Leftrightarrow \langle s_1, \dots, s_n \rangle \in I[R]$$

כאשר $s_1, \dots, s_n$ הם ש"סים.

תרגיל (ממבחן)

הוכך או הפוך:

א. אם פסוק יישי נכון בכל מבנה הרברנד, אז הוא תקף (יישי זה כמו אוניברסלי רק שיש הרבה "קיים" בהתחלה).

נכון!

אז מעולם לא עבדנו אם הרבה "קיים" בהתחלה, אבל עבדנו אם "לכל". אז איך נעבור למה שאנחנו מכירים? נשתמש בשלילה.

אם φ פסוק יישי שנכון בכל מבנה הרברנד, אז $\neg \varphi$ שקול לפסוק אוניברסלי (לשים לב! הוא לא פסוק אונ' - אלא רק שקול לאחד כזה, כי אנחנו יודעים עם סדרת שקילויות להכניס את ה- $\neg$ פנימה. כל עוד לא הכנסנו את זה פנימה, זה הוא לא פסוק אוניברסלי), ולא ספיק באף מבנה הרברנד. לפי הטענה, $\neg \varphi$ אינו ספיק, וזה בדיוק כמו להגיד ש- φ תקף.

זו שאלה פשוטה שרק צריך להבין איך לעבור מיישי ל"לכל"י.

ב. אם פסוק נכון בכל מבנה הרברנד אז הוא תקף.

החלשנו את ההנחות מסעיף א' ולכן הוא כנראה לא נכון. ננסה להוכיח את זה.

מאוד חשוב לזכור מה שהולך להיות פה - אנחנו הולכים לראות פסוק שהוא דומה נגדית להרבה דברים.

$$\varphi = (R(c) \wedge \forall x (R(x) \rightarrow R(f(x)))) \rightarrow \forall x R(x)$$

זו למעשה סכימת האינדקוציה. כמובן שלא מספיק להביא את הדוגמא הנגדית, אלא צריך להסביר למה

היא כזו. אז אנחנו טוענים ש- φ (זה האחרון) הוא לא תקף. נסתכל על:

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{N} \cup \{0\} \\ x > 0 &\Leftrightarrow x \in I[R] \\ I[c] &= 7 \end{aligned}$$

כאשר f היא פונקצית העוקב.

עכשיו צריך להראות ש- φ נכון בכל מבנה הרברנד. נניח בשלילה שקיים מנה הרברנד M שבו φ לא נכון. זה אומר ש:

1. $M \not\models \forall x R(x)$
2. $M \models R(c)$
3. $M \models \forall x (R(x) \rightarrow R(f(x)))$

קבוצת השסים שלנו היא (והיא גם התחום)

$$D = H(L) = \{c, f(c), f(f(c)), \dots\}$$

וכעת להוכחה:

יהי t הש"ס הקצר ביותר המקיים $M \models R(t)$

למה קיים כזה? בגלל 1. הוא אומר שיש לפחות אחד כזה, אז נקח את הקצר ביותר. אנחנו טוענים ש- $t \neq c$ למה? בגלל 2.

לכן $t = f(t')$ כאשר t' הוא ש"ס הקצר מ- t . (כי אם הוא לא c אז הוא צריך להיות f של משהו). ולכן $R(t) = R(f(t'))$ (זה לא הכי פורמלי, הכוונה היא כמובן לפירוש)

אבל אז מ- 3, $M \models R(t')$ כדי שהגרירה ב- 3 תשאר נכונה לכולם. וזה בסתירה למינימליות של t . (כי איך בחרנו אותו, ש"ס הכי קצר ש- M לא מספקת את ה- R שלו).

זה לגבי מבנה הרברנד בכלליות.

מה בעצם משפט הרברנד תורם לנו? עוזר לנו לבדוק ספיקות של פסוקים אוניברסליים - אבל הוא מדבר רק עליהם. אם אנחנו רוצים לבדוק עבור פסוק כלשהוא, אנחנו יכולים להשתמש במשפט הרברנד? אפשר - כל פסוק אפשר להביא לצורה שקולה של פסוק אוניברסלי. ואת זה עושה לנו משפט סקולם.

משפט סקולם

אם φ פסוק, קיים אלגוריתם שיוצר פסוק אוניברסלי φ' כך ש- φ ספיק אם"ם φ' ספיק. האלגוריתם הזה יאפשר לנו בהנתן איזה שהוא פסוק, לעשות את התהליך ולמצוא לו פסוק אוניברסלי שקול ואותו לבדוק באמצעות משפט הרברנד.

האלגוריתם:

1. נעביר את φ לצורת PNF.
2. נסלק כמתים ישיים על ידי תהליך סקולמיזציה. מה הוא אומר? אם היא לנו פסוק מהצורה

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi(x_1, \dots, x_n, y)$$

אז זה נעביר ל:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$$

כאשר f הוא סימן פונקציה חדש.

אם אין ב- φ עוד דברים חוץ מ- y , מעברים את $\exists y \varphi(y)$ ל- $\varphi\{\frac{c}{y}\}$.

התהליך הזה הוא (סקולמיזציה) הוא לטיפול בכמתים יישים במקרה של פסוקים מצורת PNF.

תרגיל

הוכח:

$$\vdash_{FOL} \forall \varepsilon \exists \delta \forall x P(\varepsilon, \delta, x) \rightarrow \forall \varepsilon \forall x \exists \delta P(\varepsilon, \delta, x)$$

כלומר צריך להוכיח שזה תקף.

φ תקף אם"ם $\neg \varphi$ לא ספיק.

אז תחילה צריך להשתמש בכלל אלפא על מנת שלא יהיו לנו התנגשויות בשמות עכשיו כשאנחנו עושים שימוש בשקילויות ועלולים לערבב בין המשתנים הקשורים:

$$\vdash_{FOL} \forall \varepsilon \exists \delta \forall x P(\varepsilon, \delta, x) \rightarrow \forall \varepsilon' \forall x' \exists \delta' P(\varepsilon', \delta', x')$$

וכעת:

$$\neg \varphi \equiv \forall \varepsilon \exists \delta \forall x P(\varepsilon, \delta, x) \wedge \neg \forall \varepsilon' \forall x' \exists \delta' P(\varepsilon', \delta', x')$$

כדי להכניס את ה- $\neg$:

$$\neg \varphi \equiv \forall \varepsilon \exists \delta \forall x P(\varepsilon, \delta, x) \wedge \exists \varepsilon' \exists x' \forall \delta' \neg P(\varepsilon', \delta', x')$$

עכשיו נעביר לצורה פרנקסית (יש כמה דרכים לעשות את זה):

$$P_{\text{prenex}}(\neg \varphi) = \exists \varepsilon' \exists x' \forall \varepsilon \forall \delta \forall x (P(\varepsilon, \delta, x) \wedge \neg P(\varepsilon', \delta', x'))$$

וכעת לצורה של סקולם:

$$Sk(P_{\text{prenex}}(\neg \varphi)) = \forall \varepsilon \forall \delta' \forall x (P(\varepsilon, f(\varepsilon, \delta'), x) \wedge \neg P(a, \delta', b))$$

אפסילון' ו- x' הם מקדימה (בצורת ה- PNF), אז הם הווחלפו בקבועים, דלתא הוחלף בסימן פונקציה חדש.

לפי משפט הרברנד: ψ ספיקה אם"ם ψ^* ספיקה.

כעת:

$$H(L) = a, b, f(a, a), f(a, b), \dots$$

!:

$$\psi^* = \{ \underbrace{P(a, f(a, b), b) \wedge \neg P(a, b, b)}, \underbrace{P(a, f(a, f(a, b)), b) \wedge \neg P(a, f(a, b), b)}, \dots \}$$

וזו קבוצת אינסופית... אבל נשים לב למה שמסמון בקו תחתון - יש לנו פסוק ושלילתו - ולכן לא נוכל למצוא מבנה והשמה שמספקים את כל הקבוצה ψ^* .
הדרך הזו היא לא יעילה לבדוק תקפות. דרך יותר יעילה תפורסם באתר.

משפט הקומפקטיות

T ספיקה אם"ם כל תת קבוצה סופית של T ספיקה.

תרגיל

הוכח שלא קיים פסוק φ בשפה המכילה E^2 , הנכון בגרף G אם"ם אין ב- G מעגל פשוט באורך זוגי.

הוכחה

נניח כי קיים φ כנ"ל. נגדיר:

$$\psi_2 := \neg \exists x_1 (\exists x_2 (E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_1) \wedge x_1 \neq x_2))$$

מה הפסוק הזה אומר? הוא אומר שאין מעגל באורך 2.
כעת אפשר:

$$\psi_2 := \neg \exists x_1 (\exists x_2 (E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_1) \wedge x_1 \neq x_2))$$

...

$$\psi_n := \neg \exists x_1 \dots \exists x_n (E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge \dots \wedge E(x_n, x_1) \wedge \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i, j \leq n}} x_i \neq x_j) \dots)$$

...

ויצרנו אינסוף פסוקים שמתארים את אי הקיום של מעגלים בגדלים מסויימים.
כעת נתסכל על התורה:

$$T = \{\psi_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg \varphi\}$$

כל תת תורה סופית של הקבוצה הזו היא ספיקה, אבל ברור שכל T לא ספיקה (כי זה כל T - פסוקים שלכל מספר זוגי אומרים אין מעגל בגודל כזה, וכולל הטענה $\neg \varphi$ שאומרת שיש מעגל באורך) - זו סתירה למשפט הקומפקטיות.

מה שהיה חשוב כאן זה אופן הבניה - כשרוצים להיות לא קיים פסוק שאומר משהו, מניחים שהוא קיים, בונים תורה של פסוקים שסותרים אותו כך שכל תת קבוצה היא ספיקה.