

## לוגיקה למדמ"ח – שיעור 12

נקדיש את תחילת ההרצאה היום, לא כדי להוכיח את משפט השלמות בצורה מלאה, אלא כדי לראות איך מוכיחים אותו באופן עקרוני. אחרי זה נעבור ליישומים שלו.

אז משפט השלמות (ולמעשה גם הנאותות) הוא:

$$T \vdash_{FOL}^v \varphi \Leftrightarrow T \vdash_{HFOL} \varphi$$

יש לנו גם משפט שלמות ונאותות עבור  $NDFOL$  ו- $FOL^I$ , אבל אנחנו נדבר על רק השקילות שרשומה לנו בשורה הקודמת.

### הוכחה של משפט השלמות של FOL – דיון מקדים

אז אמרנו שכיוון אחד הוא קל יחסית – התקפות. וגם פחות או יותר הראינו אותה בסוף שיעור 10. אמרנו שאפשר להניח ש- $T$  מורכב מפסוקים בלבד ושפי' הוא פסוק (כי ב- $v$ -נביעה אפשר לעבור מנוסחא לסגור האוניברסלי שלה).

מה עשינו בתחשיב הפסוקים?

הנחנו כי  $T \vdash_{HPC} \varphi$  והרחבנו את  $T$  לתורה  $T^*$  כך שמתקיים:

$$1. T^* \vdash_{HPC} \varphi$$

$$2. \text{אם } \varphi \notin T^* \text{ אז } \varphi \notin T^* \cup \{\varphi\} \vdash_{HPC} \varphi$$

כלומר  $T^*$  היא קונסיסטנטית ושלמה.

גם במקרה שלנו נרצה לעשות את אותו הדבר. נניח כי פי' לא יכח מ- $T$  (הפעם ב- $HFOL$ ) ונרחיב את  $T$  כך שפי' עדיין לא יכח אבל  $T$  תהיה מקסימלית.

באופן טבעי הגדרנו מודל בהוכחה הראשונה לאטומיים לפי שייכות ל- $T^*$ . על סמך השלמות והקונסיסטנטיות הראינו שלכל פסוק פסי' הוא נכון במודל שהגדרנו אם"ם הוא שייך ל- $T^*$ . (אם אתם לא זוכרים, קפצו לשיעור 4 להוכחה).

פה נרצה להגדיר אותו דבר. אך כאן נצטרך לדעת מה המבנה. עכשיו אנחנו יודעים מה התשובה - מבנה הרבנרד עבור השפה (עם הוספת קבוע לשפה במקרה הצורך).

נניח  $\varphi \models_{HFOL} T$  (כאשר  $T \cup \{\varphi\}$  קבוצה שמורכבת מפסוקים). נרחיב את  $T$  לתורה  $T^*$  כך ש:  
 1.  $\varphi \models_{HFOL} T^*$ .

2. אם פס' פסוק כך ש:  $\varphi \notin T^*$  אז  $\varphi \models_{HFOL} T^*$ .  
 כלומר מאוד דומה למה שעשינו קודם.

כמו שעשינו במקרה הפסוקי, נקח את הפסוקים האטומיים.  
 לגבי "פסוק אטומי" - כאן זה לא  $P_0, \dots$  אלא פרדיקט n-מקומי שמופעל על n ש"סים.

הלמה העיקרית היא שפסוק נכון במבנה אם"ם הוא שייך ל-  $T^*$  (ממש כמו הלמה העיקרית שלנו בהוכחת השלמות בתחשיב הפסוקים). אז היא מתחילה כמו בתחשיב הפסוקים - לפי אטומי זה לפי הגדרה, לגבי צירופים בולינאנים זה נובע מהנחות האינדוקציה (ופה חשוב שמדובר בפסוקים). אבל יש עוד מקרה שצריך לדון בו... (2 מקרים למעשה) אם פ' הוא ל"כל x משהו" או "קיים x משהו". וזה מקרה חדש שצריך להכניס לאינדוקציה שלנו.

נקח בתור  $D$  את מרחב הרברנד של השפה. נגדיר את מבנה הרברנד המתאים ע"י שנשים בבסיס הרברנד את כל הפסוקים האטומיים השייכים ל-  $T^*$  (בסיס הרברנד ומרחב הרברנד קובעים לחלוטין את המבנה, דיברנו על זה שיעור שעבר).

עכשיו אנחנו מנסים להוכיח באינדוקציה על מבנה הפסוק פס' ש-  $M \models \varphi$  (M - מבנה הרברנד הנ"ל) אם"ם  $\varphi \in T^*$ . כל ההוכחה באינדוקציה היא אותו דבר כמו לתחשיב הפסוקים, חוץ מהחלק עבור הכמתים.

שוב משפט אחרון: ההוכחה מתקדמת באופן דומה לזה שהיה בתחשיב הפסוקים (בבית מומלץ לעשות את זה, כך גם נחזור על איך הוכחנו זאת בתחשיב הפסוקים), אבל יש שני מקרים (אם עובדים בשפה שיש בה רק לכל אן קיים, כלומר יש רק כמת אחד והשני הוא קיצור של השני, אז יש רק מקרה אחד), אבל מעשית רק אחד, חדשים:

כשפי היא מהצורה  $\forall x \varphi$  או  $\exists x \varphi$ .

נניח נקח את המקרה עם הקיים. מה שאנחנו צריכים להראות זה... אנחנו יודעים ש-  $M \models \exists x \varphi$  אם"ם קיים ש"ס t כך שמתקיים:  $M \models \varphi \{t/x\}$  (אחת הטענות מהשיעור הקודם).

ל.ה.א זה אם"ם יש ש"ס t כך ש:  $\varphi \{t/x\} \in T^*$  וזה צריך להיות אם"ם  $\exists x \varphi \in T^*$ . הנקודה

החלשה בשיקול זו הנקודה האחרונה (לכן רשום "צריך להיות"). הבעיה היא שכיוון אחד הוא טריוויאלי. אם יש t כזה שהצבה שלו בפס' נמצאת ב-  $T^*$  אז "קיים..." נמצא בתורה  $T^*$  (כי  $T^*$  סגורה תחת מה ש HFOL יודעת לעשות, ואחת האקסיומות שלה זה גרירה כזו). הבעיה היא הכיוון ההפוך. אם אני יודע ש"קיים..." נמצא ב-  $T^*$  אז האם יש עד (איזה שהוא t) שמראה לי את זה? אם לא נניח עוד הנחות לגבי  $T^*$  (כלומר נניח רק את שתי ההנחות שלנו מההתחלה) זה לא מספיק לכך שאם היא אומרת שמהו קיים אז היא

יכולה "לשלוף" דוגמא. אז מה עושים? טוב צריך לדרוש מ-  $T^*$  יותר - עוד תכונה. לתכונה זו קוראים תכונת "הנקי" והיא אומרת:

לתורה  $T$  יש את תכונת הנקי אם בכל מקרה שפסוק מהצורה  $\exists x \psi$   $\vdash_{H_{FOL}} T$  אז יש ש"ס  $t$  כך ש:  
 $\{t/x\} \psi \vdash_{H_{FOL}} T$  (כלומר הוא משמש עד).

מה שאנחנו יכולים להוכיח זה שאם תורה היא קונסיסטנטית, שלמה (2 אלה זה למעשה מקסימלית) ומקיימת את תנאי הנקי, אז הבניה שתיארתי תתן מודל של התורה.

## הוכחה של משפט השלמות של FOL

אז לוקחים תורה  $T$  שהיא קונסיסטנטית ומרחיבים אותה לתורה קונסיסטנטית, שלמה, ומקיימת את תנאי הנקי. איך עושים את זה? תחילה - לא נשארים בשפה המקורית. אם אין קבוע צריך להוסיף קבוע אבל זה לא משנה בינתיים (כלומר אנחנו נשנה את השפה עוד). להמשך - אפשר להוסיף עוד קבועים (וזה לא משנה מה ניתן להוכיח בשפה המקורית - אם  $\phi$  בשפה המקורית והוא יכיח מ- $T$  אז זה אמ"ם הוא יכיח בשפה החדשה שאליה הוספנו רק קבועים) ואפשר להוסיף אינסוף קבועים. מה שעוד עושים - בתחשיב הפסוקים סידרנו בשורה את הכל הפסוקים והחלטנו האם להוסיף מישהו לפי איך הוא משפיע על הקונסיסטנטיות - זה מבטיח שמקבלים תורה קונסיסטנטית ושלמה. פה צריך לעשות עוד צעד. כאשר אני מחליט להוסיף פסוק מהצורה:  $\exists x \psi$  אני מייד מוסיף עוד פסוק הוא עד עבורו -  $\psi\{c/x\}$  כך ש-  $c$  הוא קבוע חדש שעוד לא השתמשנו בו. צריך להראות שהתורה שלנו היא עדיין קונסיסטנטית.

עד כאן סיימנו את הדומה והשונה בין 2 ההוכחות של משפט השלמות (תחשיב הפסוקים מול FOL).

### תהיה פילוסופית - תכונת הנקי זה לא מתחייב?

כלומר זה לא אוטומטית נובע מהדרישות שלנו? אנחנו באמת צריכים לדרוש אותה בנוסף? אז התשובה היא כן.

דוגמא לא טובה לזה היא ההוכחה שיש מספר אי-רציונלי בחזקת מספר אי-רציונלי כך שהתוצאה היא מספר רציונלי. מסתכלים על  $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$  וכו' (מי שלא מכיר את ההוכחה שיחפש באינטרנט).

זו הוכחה שאומרת:  $\exists x \exists y (R(x) \wedge R(y) \wedge R(x^y))$ .

אבל אין כאן ש"ס שמראה את ה-  $t, s$  שמקיימים את זה. כל מה שאנחנו יודעים זה שאחד מהם (משני המספרים שנבנים במהלך ההוכחה) הוא דוגמא. יכול להיות שהתורה שלי לא יודעת מי מהם הוא הרציונלי. הדוגמא לא טובה כי הוכיחו ש-  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  הוא אי-רציונלי.

## אפליקציות ומסקנות ממשפט השלמות

**מסקנה 1:** משפט הקומפקטיות עבור  $\mathcal{L}_{FOL}$ .

נוסח א': אם  $\mathcal{U} \models \Sigma$  (פסוקים) אז יש קבוצה סופית גאמא חלקית ל-  $T$  כך ש:

$\mathcal{U} \models \Gamma$ .

נוסח ב' (שקול): תורה  $T$  של פסוקים היא ספיקה אם"ם כל קבוצה חלקית סופית שלה היא ספיקה.

אנחנו אמרנו כאן תמיד פסוקים כדי שלא נצטרך להתייחס ל-  $t$ -ספיקות או  $v$ -ספיקות.

יש לזה כמה שימושים, וזה נראה כמה דברים שנובעים מזה (חלק לא ממש מעודדים). זה מראה מצד אחד את הכוח של  $FOL$  - כל קביעה נובעת מחלק סופי של הידע שלנו, שזה מראה גם על חולשה.

נזכר מה היא השפה של תורת המספרים.  $L_{PA}$  מכילה:

0 - קבוע

, = - סימן יחס דו-מקומי

S - סימן פונ' חד-מקומי

+, \* - סימן פונ' דו-מקומי

אפשר להוסיף גם חזקה, עצרת אם אתם לא בטוחים אם אפשר להגדיר אותם מהקיימים או לא, פשוט אפשר להוסיף וכו'. אבל - לא חשוב מה נקח, משפט: לא קיימת תורה  $T$  בשפה מסדר ראשון הנ"ל ש-  $\mathbb{N}$  היא המודל היחיד שלה. בלשון יותר טכנית אומרים - אין מערכת אקסיומות קטגורית מסדר ראשון עבור  $\mathbb{N}$ . ולא משנה איזה אקסיומות נקח - זה עדיין יקרה...

למה רצוי שתהיה כזו? כי אנחנו אמורים להכיר את הטבעיים בתור מבנה מסויים.

הטבעיים זה לא דווקא מה שאנחנו חושבים

מה ההוכחה של זה? היא האמת די קצרה.

סכימת ההוכחה:

נניח  $T$  תורה קונסיסטנטית (כדי שיהיה לה מודל בכלל, אם היא לא קונסיסטנטית אז אין לה מודל בכלל) בשפה הנ"ל כך ש-  $\mathbb{N} \models T$ . נראה שיש לה מודל שונה מ-  $\mathbb{N}$  (הכוונה שלנו זה עד כדי איזומרפיזם, כלומר לא נביא פה את השלילים עם התאמות כדוגמא לזה). בשפה זו, ש"ע הם:

$S, S(0), S(S(0)), \dots$

לפי תורה זו, הם שונים (אחרת  $\mathbb{N}$  בכלל לא מודל שלה). נוסיף לשפה קבוע חדש -  $c$ . כלומר ניצור מ-  $T$  תורה חדשה ע"י שנוסיף לשפה קבוע חדש  $c$ , ואת האקסיומות הבאות (אין סוף אקסיומות):

$c \neq 0, c \neq S(0), c \neq S(S(0)), \dots$

$T^*$  מורכב מכל מה שהיה ב-  $T$  ומכל הפסוקים החדשים האלה.

הטענה שלנו היא: ל-  $T^*$  יש מודל.

כדי להראות את זה מספיק להראות, לפי משפט הקומפקטיות, שכל קבוצה חלקית סופית של  $T^*$  ספיקה. נקח קבוצה חלקית סופית, היא מורכת מפסוקים. אנחנו צריכים לתת פירוש ל-  $c$  שיבטיח שהיא תהיה ספיקה. מספיק לתת ל-  $c$  פירוש כמספר שלא קיים בקבוצה (אי אפשר לעשות את זה לתורה המקורית [כלומר המלאה] כי אם אפשר לקחת מספר ששונה מכל המספרים הטבעיים).  $c$  הוא מספר כלשהוא שאין אליו התייחסות בקבוצה הסופית. לכן לכל קבוצה סופית חלקית יש מודל, ואז לפי משפט הקומפקטיות לכל התורה יש מודל. הוא יהיה מודל של  $T$ , יהיה בו  $1,2,3,\dots$  ויהיה בו עוד איבר ששונה מכולם. כיוון שב-  $T$  אין מספר שגדול מכל המספרים, הם לא יכולים להיות איזומורפיים.

כעת ההוכחה בצורה מסודרת:

נניח תורה בשפה הנ"ל, שיש לה מודל שונה מ-  $\mathbb{N}$ . ניצור תורה חדשה ע"י שנוסיף לה קבוע חדש ואת כל הנוסחאות (האקסיומות של השונות). אפילו אם יש קבוע לכל אחד ואחד מהטבעיים, עדיין נוכל להוסיף את הקבוע שלנו.

מספיק להראות שכל קבוצה סופית חלקית ל-  $T^*$  היא ספיקה. נראה זאת:

תהי גאמא חלקית ל-  $T^*$  סופית. נראה שיש לה מודל. כעת:  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  כאשר  $\Gamma_1 \subseteq T$  ו-

$$\Gamma_2 = \{c \neq k_1, \dots, c \neq k_l\} \quad (\text{כאשר } k_1, \dots, k_l \text{ מספרים טבעיים}).$$

נבנה מודל  $M_T = \langle D, I \rangle$  עבור  $T^*$  באופן הבא:  
D:

המספרים הטבעיים הרגילים.

א:

א. לכל אחד מהקבועים, סימן הפונ' וסימן היחס של השפה המקורית,  $I$  מתאימה את הפירוש הרגיל שלהם (0 זה אפס,  $>$  - זה היחס של קטן מבין המספרים וכו').

$$b. \quad I[c] = \max\{k_1, \dots, k_l\} + 1.$$

כל קבוצה חלקית סופית אחרת שלקחנו, אנחנו בונים לה מודל אחר (למעשה רק בפירוש של  $c$ ). עתה ברור ש-  $M_T$  מודל של גאמא 2. כמו כן ברור ש-  $M_T$  מודל של  $T$  המקורית ולכן גם של גאמא 1 (שחלקית ל-  $T$ ) - כי מה שנוגע לדברים ב-  $T$  לא מכילים את הקבוע  $c$  ולכן לגביהם אין הבדל בין  $\mathbb{N}$  הרגיל ל-  $M$  (שוב: כי לגבי פסוקים ב-  $T$  אין הבדל בין  $M$  לבין  $\mathbb{N}$ ). ההבדל מתבטא אך ורק למה קורה ל-  $c$  שב-  $N$  בכלל לא מתייחסת אליו ו-  $M$  נותנת לו פירוש). ולכן  $M$  מודל של גאמא.

לפי משפט הקומפקטיות יש ל-  $T^*$  מודל. במודל זה יש עצם, הוא  $I[c]$  השונה מ-  $0,1,2,\dots$  בעוד ב-  $\mathbb{N}$  אין עצם כזה. לכן  $M$  ו-  $\mathbb{N}$  הם לא איזומורפיים.

החלק האחרון בצורה באמת פורמלית:

נניח  $M = \langle D, I \rangle$  מודל של  $T^*$ . אז קיים  $a \in D$  כך ש:

$$M, x := a \models x \neq 0$$

$$M, x := a \models x \neq 1$$

$$(a = I[c])$$

:

לעומת זאת, ב-  $\mathbb{N}$  אין  $a$  כזה.

וכאן נגמרת ההוכחה. מה המשמעות של זה?

מדובר במבנה שיש בו את הטבעיים (1,2,3,4,5,...) וחוץ מהם יש עוד עצם שהוא גדול מ-1, גדול מ-2 וכו' - גדול מכל המספרים הטבעיים. גם במבנה M לכל מספר יהיה את העוקב שלו. במספרים הטבעיים לכל מספר, כמעט לכל מספר יש מישהו שבא לפניו (ל-0 אין). נכון במספרים הטבעיים:

זה לא מכיל את הקבוע c, זה בשפה המקורית, ולכן זה נכון גם  $\models \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y. x = y+1)$

בחדש. כלומר יש מי שבא לפני c. כלומר המבנה של M הוא בכלל לא פשוט ויש ענף שלם שחוקר איך בנוי המבנה הזה.

אם נגדיר את הרציונלים בצורה הרגילה, נקבל שבמבנה החדש,  $\frac{1}{a}$  כאשר  $a = I[c]$  הוא מספר גדול מ-0 אך קטן מכל מספר אי רציונלי חיובי. למספרים כאלה קוראים אינפיניטיסמלים, והתחום שמתעסק בזה נקרא אנליזה לא-סטנדרטית. זו אנליזה שבה יש אינפיניטיסמלים וזה בסדר.

אז זו הייתה אפליקציה אחת של משפט השלמות - משפט הקומפקטיות.

## אפליקציה 2: משפט סקולם לוונהיים.

נרצה עוד אפליקציה, משהו שידוע יותר כפרדוקס - זה הוא דבר שנראה תמוה. בו ברור שמשוואה לא בסדר אבל לא ברור מה. מה זה פרדוקס? אז יש לדוגמא את התחרות של אכילס והצב - האם זה פרדוקס אמיתי או לא, לא נכנס לכאן. אנחנו נציג כאן את פרדוקס סקולם שהוא לא פרדוקס אמיתי. אך הוא עדיין מעורר תהיות.

### משפט סקולם לוונהיים

אם ל-T יש איזה שהוא מודל, אז יש לה מודל בן מניה. זה מתבסס על העובדה שאנחנו עובדים בשפות בנות מניה.

הוכחה לא מלאה:

אם ל-T יש מודל אז היא קונסיסטנטית (לפי HFOL למשל) ואז הבניה בהוכחת משפט השלמות מספקת מודל בן מניה. במקרה זה D זה כל הש"ס וכו' - והוא בן מניה. זו לא ההוכחה היחידה שקיימת.

מצד שני למשפט, אנחנו יודעים שיש קבוצות שהן לא בנות מניה. משפט מתורת הקבוצות:

$$\begin{aligned} \vdash_{ST} \exists A \forall f \left( \left( \forall x \in f \exists y \exists z \ y \in \mathbb{N} \wedge z \in A \wedge x = \langle y, z \rangle \right) \right. \\ \left. \wedge \left( \forall y \forall z_1 \forall z_2 \ \langle y, z_1 \rangle \in f \wedge \langle y, z_2 \rangle \in f \rightarrow z_1 = z_2 \right) \right) \\ \rightarrow \exists w \in A \forall x \in \mathbb{N} \ \langle x, w \rangle \notin f \end{aligned}$$

(ST זה Set Theory). זה אומר שיש קבוצה שהיא לא בת מניה.

השורה הראשונה אומרת ש- $f$  הוא יחס מ- $\mathbb{N}$  ל- $A$ . השניה שהוא חד חד ערכי. השלישית שהוא לא על.

פרדוקס סקולם: יש צורך להשלים.

### מסקנה 3

הבעיה אם פסוק  $\phi$  בשפה מסדר ראשון הוא אמת לוגית היא חצי כריעה. כריעה = יש אלג' שמקבלת פסוק ב-FOL עובדת ועובדת ותמיד עוצרת ואומרת כן או לא בהתאם. אז אין תכנית כזו. הדבר השני הכי טוב, חצי כריעה - מקבלת  $\phi$  ואם היא אמת לוגית אז היא עוצרת ואומרת כן. אם הוא לא אמת לוגית אז יהיו מקרים שהתכנית לא תעצור (ולא נדע האם היא לא עצרה כי זה לא אמת לוגית או כי היא לא סיימה לעבוד).

מה האלג' לחצי כריעות? ניצר את כל ההוכחות ונבדוק האם מה שייצרנו מהווה הוכחה. אם עלינו על ההוכחה של  $\phi$  נעצור ונגיד כן, אם לא נמשיך לייצר את ההוכחות. (קשה לחשוב על שיטה שהיא פחות יעילה מהשיטה הזו, אבל היא בעיקרון באה להראות שזה אפשרי).

אפשר לעבוד עם מערכת הוכחה יותר מתוחכמות מהילברט, כמו למשל ND. אבל גם כאן אם מחפשים בצורה אקראית זה כמעט חסר כל סיכוי. שיטות מתוחכמות עושות רד' לבעיה לתחשיב הפסוקים. האם לשאול האם  $\phi$  נובע מגאמא ב-FOL, מעבירים את הבעיה לקבוצה מסוימת שהשאלה היא האם הקבוצה הזו היא ספיקה.

בנושא זה נתעסק בזמן הקרוב, ועל זה מדבר משפט הרברנד שנלמד השיעור.

קודם כל נעשה כמה רדוקציות כמו שעשינו בתחשיב הפסוקים:

$$\vdash_{FOL} \phi \text{ אם"ם } \vdash_{FOL} \{ \phi \} \text{ אינה ספיקה.}$$

אנחנו מעכשיו מתייחסים רק לפסוקים אז אנחנו לא נגיד את זה יותר ולכן אפשר לעשות נביעה ב-FOL כללית (בלי להגיד  $v$  או  $t$ ).

אם  $\{ \phi \}$  לא מזכירה כמתים - אז בעית הספיקות היא למעשה ברמה של תחשיב הפסוקים.

עד סוף השיעור יוקדש לאיך מתבצעת הרדוקציה הזו במקרה הכללי.

נחזור למה שעשינו קודם.

בעיה:

נתונה קבוצה גאמא סופית של פסוקים. האם היא ספיקה?

היא לא כריעה, אבל היא חצי כריעה. אנחנו רוצים למצוא שיטה יעילה יותר ממה שהצגנו קודם. זה הרעיון של הנושא שעכשיו אנחנו עושים.

מקרה בסיסי: אם הפסוקים לא מכילים כמתים, אנו נמצאים ברמה של תחשיב הפסוקים. כלומר קבוצת גאמא כזו של פסוקים ללא כמתים ספיקה במובן של לוגיקה מסדר ראשון אם"ם היא ספיקה במובן של תחשיב הפסוקים. ניסחנו את זה בכוונה כדי שנשאל מה ההבדל? מה זה אומר להגיד במובן זה ומובן אחר? זה כי יש לנו שני מושגי ספיקות שהם לא אותו דבר. ב-FOL יש לנו מבנה  $M$  ו- $v$ . בתחשיב הפסוקים הפסוקים שלנו היו פסוקים שנבנו מ- $P0, P1, \dots$  אבל כאן הפסוקים שלנו יכולים להראות מהצורה  $3 < 5$  או  $p(c, l(c), q(c, d))$ .

עכשיו מה זה נקרא ספיק במובן של תחשיב הפסוקים - שיש השמה שנותנת לאטומיים  $t/f$  ומרחיבים אותה באמצעות טבלאות האמת.

קודם כל יש לנו הבדל בין הדברים. עכשיו נראה שבאמת אין ממש ההבדל.

הקשר בין ספיקות בשני המובנים:

1. אם  $M$  מבנה עבור השפה אז נגדיר  $v_M$  השמה במובן של תחשיב הפסוקים ע"י:

$$v_M(A) = \begin{cases} t & M \models A \\ f & M \not\models A \end{cases}$$

כאשר  $A$  פסוק אטומי.  $v_M$  מוגדרת באופן טבעי (לפי טבלאות האמת) לכל פסוק חסר כמתים.

למה: אם  $\varphi$  פסוק חסר כמתים אז  $M \models \varphi$  אם"ם  $v_M \models \varphi$  (שזה אומר  $v_M[\varphi] = t$ ). מוכיחים

בקלות באינדוקציה. זה כי אנחנו יודעים שפסוקים מתנהגים מבחינת סיפוק ב-FOL לפי טבלאות האמת. ההוכחה היא באינדוקציה על מבנה  $\varphi$ .

2. לכיוון הפוך - אם  $v$  השמה מקבוצת הפסוקים האטומיים של שפה מסדר ראשון  $L$  אל  $\{t, f\}$  אז היא מגדירה מבנה הרברנד  $M$  כך ש-  $M \models \varphi$  אם"ם  $v(\varphi) = t$  לכל פסוק חסר כמתים  $\varphi$ .  $M$  הוא פשוט מבנה הרברנד עבור השפה שבסיס הרברנד שלו היא קבוצת הפסוקים האטומיים ש-  $v$  נותנת להם את הערך  $t$ .

הצעד הבא הוא כאשר יש כמתים. נראה תחילה את המקרה הפשוט ביותר שבו יש כמתים. נראה איך עושים את הרדוקציה ממנו למקרה שאין בו כמתים.

המקרה המיוחד הוא ש-  $T$  מורכבת מפסוקים אוניברסליים.

הגדרה: פסוק אוניברסלי הוא פסוק מהצורה  $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi$ , כשפסי הוא נוסחא ללא כמתים. את החלק של הכמתים מכנים ה"רישא" של הפסוק. לחלק של פסי קוראים ה"מטריצה" של הפסוק.

נניח  $\varphi$  נוסחא:  $f_\varphi(\psi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . אז אינסטנציה סגורה של פסי היא פסוק מהצורה

$\psi\{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$ , כלומר פסוק המתקבל מפסי ע"י הצבת ש"סים במקום התשתנים החופשיים

של פס'.

## משפט הרברנד

תורה  $T$  המורכבת מפסוקים אוניברסליים היא ספיקה (במובן של לוגיקה מסדר ראשון) אם קבוצת האינסטנסיות הסגורות של המטריצות של איברי  $T$  היא ספיקה במובן של תחשיב הפסוקים.

מה זה אומר? יש לי קבוצה של פסוקים אוניברסליים. כל איבר כזה של  $T$  אני ניגש למטריצה (כלומר מוחק את ה"לכל"-ים) ועושה את כל ההצבות במקום המשתנים החופשיים. מאחדים את קבוצת כל האינסטנסיות ומקבלים את מה שאנחנו מדברים עליו פה. זו היא קבוצה של פסוקים שאין בהם כמתים יותר, ואז אפשר לדבר על ספיקות במובן של תחשיב הפסוקים. וזו הרדוקציה.

לשים טוב לב, שגם אם  $T$  היא סופית זה לא אומר שמה שקבילנו זה סופית (כי יכול להיות שיש לנו אינסוף ש"ס בשפה), ואז נקבל רק שיטת חצי הכרעה.

## הוכחה

נניח  $T$  ספיקה. נניח  $M \models T$ . כיוון ש:  $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi \models_{FOL} \psi \{t_{x_1}, \dots, t_{x_n}\}$  אז כל אינסטנסיה סגורה של המטריצה של כל אחד מאיברי  $T$  גם היא נכונה ב- $M$ . לכן  $M \models T^*$  כאשר  $T^*$  היא קבוצת כל האינסטנסיות הסגורות של המטריצה של כל אחד מאיברי  $T$ . ולכן  $\forall m \models T^*$  (במובן של תחשיב הפסוקים) (ב- $T^*$  יש רק פסוקים חסרי כמתים). ולכן  $T^*$  ספיקה במובן של תחשיב הפסוקים.

לכיוון ההפוך, נניח  $T^*$  ספיקה במובן של תחשיב הפסוקים. נניח  $v$  מודל שלה. במובן זה:  $v \models T^*$ . יהי  $M$  מבנה הרברנד המושרה על ידי  $v$  (זה אומר ש-  $p(t_1, \dots, t_n) \in HB(M)$  אם  $v[p(t_1, \dots, t_n)] = t$ ) אז ראינו שלכל  $\psi \in T^*$  מתקיים ש:  $M \models \psi$  אם  $v[\psi] = t$ .

נראה ש- $M$  הוא מודל של  $T$  עצמו (רק בגלל שבחרנו במבנה הרברנד אנחנו יכולים לעשות את זה).

נניח  $\varphi \in T$  אז  $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$  כשבפס' אין כמתים. כיוון ש- $M$  מבנה הרברנד:

של ההרברנד.  $M \models \varphi \Leftrightarrow M \models \psi \{t_{x_1}, \dots, t_{x_n}\}$  לכל  $t_1, \dots, t_n$  ש"סים (ראינו בשיעור שעבר). כאן נכנס העניין

וכיוון ש-  $\psi \{t_{x_1}, \dots, t_{x_n}\}$  נמצא ב- $T^*$  (לכל  $t_1, \dots, t_n$  ש"סים) אז אכן

$M \models \psi \{t_{x_1}, \dots, t_{x_n}\}$  (לכל  $t_1, \dots, t_n$  ש"סים).

זה אומר שיש לנו דרך לטפל בקבוצה שמדובר בקבוצה של פסוקים אוניברסליים. שזו דרך יותר טובה מאשר לחפש הוכחות ב- $HFOL$ .

נסביר מה עושים כאשר מדובר בקבוצה  $T$  שהיא לא מורכבת מפסוקים אוניברסליים. הסברים והוכחות

נראה בשיעור הבא.

נסכם את השלבים (מה שעשינו ומה שאנחנו עומדים לעשות).

אנחנו מתחילים עם הבעיה:  $\Gamma \vdash_{FOL} ? \varphi$

הרדוקציה:

1. האם  $\varphi \in \Gamma$  ספיקה?

2. נביא את זה לצורה של פסוקים אוניברסליים (התחלנו בתרגול האחרון לראות איך עושים את

זה). מעבירים כל פסוק ב-  $\varphi$  לצורה פרנקסית נורמלית:

(פסוקים אוניברסליים זה מקרה פרטי של PNF שכל הכמתים הם  $\forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 \dots \forall x_n \dots \psi$ )

"לכל"). איך עושים את זה? בעזרת הדף החולק בשיעור של שקילויות.

3. עושים סקולמיזציה (העברה של פוסקים מצורת PNF לצורת פסוקים אוניברסליים) של הפסוקים

שהתקבלו בשלב 2.

נניח יש לנו פסוק בצורת PNF:  $\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 \forall x_5 \varphi$  מה זה אומר לעשות סקולמיזציה

של הפסוק הזה (של התורה זה פשוט לעשות לכל האיברים) אז מעיפים את הקיים הראשון:

$$\forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 \forall x_5 \varphi \{c/x_1\}$$

ואז את ההבא:

$$\forall x_2 \forall x_3 \forall x_5 \varphi \{c/x_1, g(x_2, x_3)/x_4\}$$

אנחנו מוסיפים סימן פונ' חדש.

חשוב לשים לב! סקולמיזציה לא שומרת על שקילות אבל שומרת על ספיקות. וכעת יש לנו קבוצה של

פסוקים אוניברסליים ומשתמשים במשפט הרברנד.