

לוגיקה למדמ"ח – תרגול 7

התרגול היום מחולק לשני חלקים לא קשורים:

- לוגיקות רב ערכיות.
- תחשיב הפרדיקטים - לוגיקה מסדר ראשון – FOL – First Order Logic.

לוגיקה רב - ערכית

אז מה יש לנו בלוגיקה רב ערכיות?

- קבוצה S (יכולה להיות אינסופית) של ערכי אמת, בדר"כ T ו- F נמצאים בתוך ה- S הזו.
- קבוצה $D \subseteq S$ שאינה ריקה של ערכי אמת, שאנו קוראים להם "מצויינים" (כלומר שמציינים אותם), בדרך כלל $t \in D, f \notin D$.
- לכל קשר n -מקומי * נגדיר פונקציה אמת (טבלת אמת): $g_*: S^n \rightarrow S$.

השמה

השמה היא פונ' מקבוצת הנוסחאות ל- S המכבדת את טבלאות האמת של הקשרים.

v מהווה מודל של A אם $v(A) \in S$.

אנקדוטה

בינה מלאכותית זה נושא חם ביום. הנושא של AI הגיע מזה - הוא מבוסס על לוגיקה רב ערכית, שנקראת fuzzy logic (לוגיקה עם אינסוף ערכי אמת). זה בא לתאר אינטליגנציה - כי יש לנו המון מושגים "עמומים".

האם D יכולה להיות שווה ל- S ? כן, אבל אז הלוגיקה שלנו לא אומרת כלום. (למעשה בשיעור לא הסמכנו שזה יקרה, אמרנו שהיא חייבת להיות חלקית ממש)

הלוגיקה של גדל: $S = \{t, f, \perp\}$ (מקביל למה שאנחנו סימנו בשיעור כ- $S = \{1, 0, \frac{1}{2}\}$), $D = \{t\}$.

שימוש

ב- DB איך עובדים עם זה? BOTTOM הוסיפו כדי להתמודד עם חוסר מידע. כשאני בא לבדוק טענה אז יכול להיות שהיא נכונה, יכול להיות שלא, ויכול להיות שאין לי מידע על זה. לפעמים יש לנו אפילו $S = \{t, f, \perp, \top\}$ - TOP זה אומר שיש לנו מידע סותר (כלומר אני אחזיר TOP עבור שאלות שיש לי עליהן שתי תשובות סותרות).

טבלאות האמת:

$\neg$	
t	f
f	t
$\perp$	f

כשאני מגדיר לוגיקה רב ערכית שיש בא t ו- f אני ארצה שאני אשאר עם ההגדרות המקוריות כל עוד לא מעורבים דברים חדשים (כלומר במקרים הקלאסיים – תוצאות קלאסיות) - לכן שתי השורות הראשונות בטבלה נקבעות אוטומטית.

$\rightarrow$	t	f	$\perp$
t	t	f	$\perp$
f	t	t	t
$\perp$	t	f	t

שוב, מה שלא מעורב בו BOTTOM נרצה שיהיה אותו דבר.

למה BOTTOM גורר f זה f ? מבחנת האינטואיציה BOTTOM הוא "טיפה יותר נכון" מ- f , ואז הוא לא יכול לגרור f . [אזהרה! המשפט הזה טוען טענה לא מדויקת בעליל ואם אני לא טועה המתרגלת ביקשה אפילו לא לצטט אותה! השימוש במידע בשורה זו הוא על אחריות הקורא בלבד!]

לגבי שאר המקומות - מיצאו את האינט' שתתאים לכם להבין למה הגדירו את זה (את גדל) כך. t גורר BOTTOM באמת לא ממש ברור – תצטרכו להתאמץ יותר.

נמשיך לשאר הקשרים:

$$a \vee b = \max(a, b) \quad a \wedge b = \min(a, b)$$

תרגיל

האם $N2$ נובעת משאר האקסיומות ב- HPC בלוגיקה של גדל? (ניזכר: $(N2) A \rightarrow A$)

פתרון

אנו רוצים לבדוק אם כל השמה שמספקת את שאר האקסיומות תספק גם את $N2$.
בשיעור הוכחנו שכל משפט של HPI הוא טאו' בלוגיקה של גדל. בפרט, כל האקסיומות של HPI הן טאו'
בלוגיקה של גדל (כי כל אקסיומה היא משפט).

אז כל האקסיומות של HPI הן טאו'. עכשיו נזכר, איך אנחנו מקבלים את HPI - בדיוף רשימת האקסיומות
של HPC רק שמחליפים את $N2$ במשהו אחר.

כל האקסיומות של HPC פרט אולי ל- $N2$ הן טאו' בלוגיקה של גדל (בעקבות הפסקה הקודמת). אז איך
נבדוק האם יש נביעה או לא?

אנחנו צריכים לבדק האם $N2$ הוא טאו'.

אז אפשר לבדוק. נבדוק - אם ההשמה היא מכילה רק T ו- F זה יהיה בסדר (כמו בקלאסי וזה טאו' עבורם
- כלומר ההשמות שמערבות T ו- F מספקות אותה). לכן צריך לבדוק רק השמות שמערבות
BOTTOM.

נבדוק: $v(A) = \perp$ ונקבל ההשמה תתן לפסוק $\perp$. כיוון ש- $\perp \notin D$ אז $N2$ אינה טאו' ולכן אינה נובעת
משאר האקסיומות.

זה היה פסוק פשוט כי יש בו רק את A . אם היה גם B היינו צריכים לבדוק את כל השילובים שמכילים את
BOTTOM.

בגדול - התרגילים שיכולים להיות בנושא יהיו דומים לאלה.

לוגיקה מסדר ראשון

נתסכל על דוגמא:

יוסי הוא סטודנט.
כל סטודנט הוא בן אדם.
לכן יוסי הוא בן אדם.

מה היינו עושים אם היינו רוצים להצרין את זה? היינו מסמנים:

יוסי הוא סטודנט – p .
כל סטודנט הוא בן אדם – q .
לכן יוסי הוא בן אדם – r .

ואז נרצה להגיד ש: $p \wedge q \vdash_{CPL} r$, ואנחנו יודעים ש: $\vdash_{CPL} p \wedge q \rightarrow r$. אבל ברור ש- $p \wedge q \rightarrow r$ הוא לא טאו'...

אז מה הבעיה? שבתחשיב הפסוקים אנחנו נותנים לטענה פסוק אטומי, ואנחנו מאבדים הרבה מידע כך והרבה נביעות לא מתקיימות.
לכן יש לנו מוטיבציה לעבור לתחשיב האחר: תחשיב הפרדיקטים - לוגיקה מסדר ראשון.

הדרישה שלנו מתחשיב הפרדיקטים: שיהיו לנו 2 דברים שנוכל לבטא בנפרד (כלומר 2 קטגוריות סינטקטיות נפרדות, בניגוד לתחשיב הפסוקים הקלאסי):
- עצמים
- יחסים

בדוגמא שלנו: יוסי הוא עצם ויש לנו 2 יחסים - סטודנט ובן אדם.
התחשיב הזה מאפשר לנו להכנס לפרטים של הטענה.

לוגיקה מסדר ראשון

1. הא"ב של השפה (מה הסימנים מהם אנחנו יכולים להרכיב ביטויים בשפה).

המשותף

- א. סימנים לוגיים: $, (,)$
- ב. קשרים לוגיים: $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$
- ג. כמתים: $\forall, \exists$
- ד. קבוצת משתנים: $V_0, V_1, \dots$

וזה הא"ב (לא כולו עדיין) של השפה. החלק הזה של הא"ב משותף לכל הלוגיקות מסדר ראשון (לכן לא כולו, יש חלקים נוספים לכל שפה).

מה זה אומר בכל הלוגיקות? טוב, מזה נובע שיש כמה. תחשיב הפסוקים יש אחד. לעומת זאת ב-FOL יש הבדל בין לוגיקה אחת לשניה אפילו ברמה הסימנים, וזה נובע מהחלק השני של הא"ב:

סיגנטורה

זה מה יכול להיות שונה מלוגיקה ללוגיקה.

יש לנו כאן:

- א. סימני קבועים: $c_0, c_1, \dots, c_m$
 - ב. סימני פונ': $f_1^i, \dots, f_n^k$
 - ג. סימני יחסים: $R_1^i, \dots, R_n^k$
- (האינדקס העליון הוא ה-arity)
- (האינדקס העליון הוא ה-arity)

החלק הזה הוא שונה בין לוגיקה ללוגיקה. לוגיקות מסדר ראשון יש אינסוף.

2. קטוגריות סינטקטיות:

בתחשיב הפסוקים מה היה לנו? נוסחאות, פסוקים, אותו דבר...
ב-FOL יש 2 שמאוד חשוב להבדיל ביניהם:

- א. שמות עצם:
- כל משתנה הוא שם עצם
- כל קבוע הוא שם עצם
- אם $t_1, \dots, t_n$ הם שמות עצם ו- f^n סימן פונ' (נשים לב שהוא n-מקומי) אז: $f^n(t_1, \dots, t_n)$ ש"ע.

שם עצם סגור: שם עצם שאין בו משתנים. רק קבועים או פונ' שמופעלת על קבועים.

ב. נוסחאות:

- אם $t_1, \dots, t_n$ ש"ע ו- R^n סימן יחס אז $R^n(t_1, \dots, t_n)$ הוא נוסחא (שנקרא לה נוסחא אטומית).
- אם A, B נוסחאות אז: $(A \circ B), \neg A$ נוסחאות.
- אם A נוסחאת ו- x משתנה אז $\exists x A, \forall x A$ הן נוסחאות.

דרך לחשוב: פונ' מחזירה שם עצם, יחס מחזיר T או F.

למה זה כל כך חשוב הקטגוריות ולהבין אותם?

בתחשיב הפסוקים כשרצינו להוכיח תמיד אמרנו באינדוקציה על מבנה הנוסחא. עכשיו מה נעשה? תלוי.

- אם נרצה להוכיח דברים על ש"ע נעשה את זה באינדוקציה (כי כך זה ש"ע מוגדר) על ש"ע.
- אם נרצה להוכיח דברים על נוסחאות אז נעשה את זה באינדוקציה על נוסחאות (כלומר הבסיס יהי אטומיות ואז מעבר וכו')

אם נרצה משהו לכלל הביטויים בשפה נרצטר לעשות אינדוקציה גם על זה וגם על זה.

הצרנות

תחילה כדי להגדיר לוגיקה אנחנו צריכים להגדיר את החתימה שלה. נגדיר חתימה לדוגמא:

- יחסים: $=^2, dog^1, cat^1, like^2, smart^1$
- פונ': $name^1$
- קבועים: Rocky

איך נצרין את: "כל כלב הוא חכם"?

$$\forall x (dog(x) \rightarrow smart(x))$$

איך נצרין את: "קיים כלב חכם"?

$$\exists x (dog(x) \wedge smart(x))$$

עכשיו נבין מה עשינו כאן:

נחשוב על עולם שאין בו בכלל כלבים. בעולם כזה לגבי הטענה השניה אנחנו רוצים שהיא תהיה F ולכן אנו נשים "וגם" אחר ה-dog. ולגבי הטענה הראשונה נרצה תמיד שיהיה T ולכן נשתמש בגרירה.

כלל אצבע:

- "לכל" הולך עם גרירה
- "קיים" תמיד הולך עם "וגם"

איך נצרין את: "יש כלב שקוראים לו רוקי"?

$$\exists x (dog(x) \wedge name(x) = Rocky)$$

זה מדגים לנו שימוש שמות עצם:

Rocky קבוע והוא שם עצם, name פועלת על משתנה וגם מחזירה שם עצם. ולכן זה היה בסדר

להשתמש פה בסימן היחס = שמקבל שני שמות עצם. כשהשתמשנו בו למעשה היינו צריכים לכתוב $\text{name}(x), \text{Rocky}$ אבל לא נעשה את זה (ואנו בטוח שכולנו מסכימים על כך).

איך נצרין את: "יש חתול שאוהב כל כלב שאוהב אותו"?

$$\exists x (\text{cat}(x) \wedge \forall y (\text{dog}(y) \wedge \text{like}(y, x) \rightarrow \text{like}(x, y)))$$

כשרוצים שנצרין טענה, ואנחנו מגדירים סינטורה כדי להצרין אותה. לפעמים נצטרך להצרין דברים בסיסים (אצלנו לדוגמא: $\forall x (\text{dog}(x) \rightarrow \neg \text{cat}(x))$) שיגדירו את הסיגנטוקה באופן שאנחנו רוצים להשתמש בה.

עוד דוגמא: גיאוטריה אוקלידית

מה נצרה שיהיה בה:

- קבועים: אין

- פונ': אין

- יחסים: $=^2, \text{point}^1, \text{line}^1, \text{on}^2$

איך נצרין "דרך שתי נקודות עובר קו ישר"?

$$\forall x (\forall y (\text{Point}(x) \wedge \text{Point}(y) \rightarrow \exists z (\text{line}(z) \wedge \text{on}(x, z) \wedge \text{on}(y, z))))$$

ומה זה?

$$\forall x \forall y \forall \ell \forall m (\text{Point}(x) \wedge \text{Point}(y) \wedge \text{line}(\ell) \wedge \text{line}(m) \wedge$$

$$\wedge \text{on}(x, \ell) \wedge \text{on}(x, m) \wedge \text{on}(y, \ell) \wedge \text{on}(y, m) \wedge \neg (\ell = m) \rightarrow x = y)$$

זה: "כל שני ישרים שונים נחתכים בנקודה אחת בלבד (אם הם נחתכים)".

הערות:

1. נסתכל על $\forall x \exists y (x < y)$. מסכימים שזה נכון בטבעיים? כן. מה קורה אם נחליף סדר כמתים?

כלומר נסתכל על $\exists y \forall x (x < y)$. זה כבר לא נכון בטבעיים (אין חסם עליון לטבעיים). לכן יש לשים לב לסדר הכמתים.

2. בקשר להצרנות: נניח נרצה להצרין טענה מסובכת. למשל "לכל מספר ראשוני..." ואין לי סימן יחס "ראשוני" בסיגנטורה כלומר צריך להצרין אותו. מומלץ לעשות דברים כאלה:

אבל כיוון שאין את היחס פריים, אז זה בסדר לכתוב דבר כזה כאשר: $\forall x (\text{Prime}(x) \rightarrow \dots)$

(ופה להגדיר את הפריים עם סימנים מהסיגנטורה. זה כדי לשפר קריאות. $\text{Prime}(x) := \dots$)