

## לוגיקה למדמ"ח – שיעור 7

ניתן להוכיח שדברים הם לא יכחים ב- NDI, ואת זה אפשר לעשות על ידי שימוש בלוגיקה רב-ערכית (שיש בה יותר מ- 2 ערכי אמת). זה יהיה החלק הראשון של השיעור שלנו. בחלק השני נכנס ללוגיקה מסדר ראשון.

### לוגיקה רב - ערכית

- אז הרב-ערכי הכי פשוט זה שימוש ב- 3 ערכי אמת.
- מה המוטיבציה? נניח כי יש לנו תוכנה שבודקת תכונה / יחס של הקלטים שלה (לדוגמא שייכות לשפה מסוימת). אז יש כמה אפשרויות:
- התכנית רצה עוצרת ואומרת כן.
  - התכנית רצה עוצרת ואומרת לא (כלומר התכונה לא מתקיימת וכו')
  - ולצערנו יש אפשרות שלישית:
  - התכנית רצה ורצה ולא עוצרת.

לאפשרות השלישית, קליני השתמש בערך אמת שלישית עם טבלאות אמת מתאימות.

לצורך הדיון נשתמש במספרים :

- 1 - מה שמתאים ל- T שלנו .
- 0 - מה שמתאים ל- F שלנו .
- 0.5 - ערך הביניים החדש שלנו .

וכעת טבלאות האמת שלנו יהיו (נעשה עבור שלילה כעת ונראה בהמשך עבור "או"):

| $a$           | $a'$          |
|---------------|---------------|
| 1             | 0             |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0             | 1             |

הערכים עבור הדברים שמערבים 0 או 1 ישארו אותו דבר (אפשר לעשות מה שרוצים, אבל השימושיות הן שאם הקלט הוא קלאסי אז גם הפלט יהיה כזה)

לגבי ה- NOT של חצי, נקח שם שגם יהיה חצי (יותר מאוחר נראה שדווקא מקרים אחרים ששמים שם משהו אחר).

כעת לגבי טבלת האמת של "או":

חישוב להוט - רוצים לחשב את A או B. מחשבים כל אחד לחוד ורק שיש את שניהם בודקים את ה"או" ביניהם (כלומר עושים "או" רק כשיודעים כל הרכיבים). במקרה כזה:

| $\frac{b}{a}$ | 1             | $\frac{1}{2}$ | 0             |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1             | 1             | $\frac{1}{2}$ | 1             |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0             | 1             | $\frac{1}{2}$ | 0             |

[נשים לב שאנו מציגים את הטבלה של ה"או" בצורה חסכונית - של מטריצה, על מנת לא לכתוב טבלה עם 9 שורות]  
זו טבלת האמת של בוחר, נקרא גם "או" חלש של קליני.

יש גם מה שנקרא חישוב עצל - לדוגמא צריך לחשב את  $T^*S$  ומתחילים לחשב תחילה את T ורואים באמצע ש-  $T=0$ . בחישוב להוט ממשיכים עד סוף החישוב ואז מכפילים. בחישוב עצל עוצרים שם כי יודעים שכל דבר כפול 0 הוא אפס (ואז זה נעשה אפילו אם החישוב השני לא היה נעצר כלל במידה והיה נסיון לבצע אותו).

ההבדל היחידי בין הטבלה הקודמת וזו (שנקראת טבלת האמת של מקרתי - מי שהמציא את ליספ) הוא שיש לו שם אחד במקום חצי באחד המקומות (בזה שהראשון עוצר על אפס והשני נתקע):

| $\frac{b}{a}$ | 1             | $\frac{1}{2}$ | 0             |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1             | 1             | 1             | 1             |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0             | 1             | $\frac{1}{2}$ | 0             |

זו טבלת האמת של מקרתי, שנקראת גם "או" סדרתי.

אפשרות שלישית - חישוב עצל אבל מקביל (נגיד על ידי 2 מעבדים). ברגע שמישהו עוצר ואומר נכון, אז יודעים שכל ה"או" הוא נכון, ואז טבלת האמת שלנו היא:

| $\phi$        | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0             |
|---------------|---|---------------|---------------|
| 1             | 1 | 1             | 1             |
| $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0             | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0             |

זה נקרא "או" חזק של קליני או "או" מקבילי.  
גם כאן יש רק שינוי אחד בין זה לקודם.

יש עוד כמה וריאציות, אנו לא נביא לכאן את הכולם. זה בשביל שנבין את העיקרון. יצירת טבלת אמת (או בחירה מתוך קיימות) תלוי בראש ובראשונה עבור איזה אפליקציה אנו עושים זאת.

לגבי הטבלאות האחרות ניתן לעשות את 3 הוריאציות בעצמנו על פי העקרונות המנחים כאן. (רמז - חוקי דה מורגן אמורים לצאת נכונים בכל זוג מתאים מ-3 הוריאציות)

הלאה:

אנו יודעים שכדי לדבר על לוגיקה לא מספיק לתת טבלאות האמת, אנחנו בעיקר מדברים על מה נובע ממה בלוגיקה.

אז כעת - מה זה אומר שנוסחא פי נובעת מאוסף הנחות T. כלומר מתי:  $T \vdash \phi$  ? (נביעה בקליני)

אז ראינו להגדרת נביעה משהו סמנטי (כל השמה שמספקת... וכו') וראינו משהו סינטקטי - לפי מערכות הוכחה (הילבט או NDC וכו'). הוכחה כאן זה קצת בעייתי כי אין טאו' בכלל (עוד לא הגדרנו מה זה בהקשר הזה, אבל מיד נגדיר ונראה שאין). אבל גם כשאין טאו' אנו נרצה ש-A ינבע מעצמו.

בגלל שטבלאות אמת זה דבר סמנטי, יחס הנביעה הסמנטי המתאים יהיה... (מתח...)  
תחילה! מה הוא בכלל המודל כאן?

כעת השמות יכולות לתת לכל פסוק אטומי אחד מ-3 ערכי האמת שלנו. ואז עושים הרחבות לפסוקים שהם לא-אטומיים לפי טבלאות האמת.

הגדרה: מודל של T אם הוא מודל של כל אחד מהפסוקים. מודל של פסוק פי זה אם  $v(\phi)=t$  או במקרה שלנו  $v(\phi)=1$ .

אז נביעה אצלנו תהיה:

(מה זה? מה הושרץ שם מעל היחס נביעה?! בהמשך נבין למה זה הופיע מעל יחס

$$T \vdash_{k\mathcal{L}} \varphi$$

הנביעה) אם כל השמה חוקית המהווה מודל  $T$  היא גם מודל של  $\varphi$  (עד כאן סבבה, נשמע כמו ההגדרה שלנו קודם).

### רגע קטנוני

מה הכוונה ב"חוקית"?

אם מגדירים לפי האטומיים אז כל השמה היא חוקית (כי עושים הרחבה לכל הפסוקים לפי טבלאות האמת).  
אם מגדירים השמה כפונ' שנותנת ערכי אמת לכל פסוקים, אז היא חוקית אם היא מכבדת את טבלאות האמת.  
באחד התרגולים הראשונים הראו את השקילות בין ההגדרות.

זו לא האפשרות היחידה להגדרת נביעה!

בלוגיקה קלאסית, במקום להגיד ש- $v$  הוא מודל של  $A$  אם  $v(A)=t$  אנו יכולים להגיד שהיא מודל של  $A$  אם  $v(A)=f$ .

אז יחס נביעה אחר שאפשר להגדיר:

אם התנאי הבא מתקיים: לכל השמה  $v$  (שוב, ניתן לדחוף פה חוקית..) אם  $v(A) \neq 0$  לכל

$$T \vdash_{k\mathcal{L}} \varphi$$

אז גם  $A \in T$   $v(\varphi) \neq 0$ .

בקלאסית ההגדרות האלו שקולות. כאן לא.

ניסוח שקול לנביעה האחרונה:

אם התנאי הבא מתקיים: לכל השמה  $v$ , אם  $v(A) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$  לכל  $A \in T$  אז גם

$$T \vdash_{k\mathcal{L}} \varphi$$

$$v(\varphi) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$$

אחרי דבר כזה, לא יעבור הרבה זמן עד שמישהו יבוא ויתן 4 ערכי אמת ואולי 5 ואולי אינסוף וכו'...

אז איך נכליל את מה שקורה פה?

נגדיר את יחס הנביעה הראשון שוב (הבאנו הגדרה שקולה ליחס השני, נביא גם לראשון!):

אם התנאי הבא מתקיים: לכל השמה  $v$ , אם  $v(A) \in \{1\}$  לכל  $A \in T$  אז גם

$$T \vdash_{k\mathcal{L}} \varphi$$

$$v(\varphi) \in \{1\}$$

ועכשיו להכללה:

מחליטים איזה ערכי אמת הם "טובים" ואיזה הם "רעים". בדרך כלל לוקחים 1 תמיד "טוב" ו-0 תמיד "רע" וצריך להחליט מה עושים עם האחרים. פה לדוגמא היינו צריכים להחליט מה לעשות עם חצי.

"טוב" - זה desiquanted (כנראה לא הועתק נכון מהלוח..), בתרגום חופשי - "מצויין" (במובן שמצויינים אותו).

אז אמרנו שעכשיו אין לנו טאו' עם הטבלאות שבנינו. (זוכרים? לפני כמה עמודים) אם ניתן לכל האטומיים חצי, שום דבר לא "ישחרר" את החצי (כי חצי<sup>1</sup>חצי = חצי, חצי<sup>2</sup>חצי = חצי וכו') וכל הפסוקים יקבלו חצי.

למרות שאין לנו טאו' אנחנו עדיין יכולים להגיד דברים כאלה: אם פ' מקבל ערך אמת 1 גם פ' נפסי מקבל ערך אמת אחד (עבור הטבלה המתאימה) כלומר:

$$p \vdash \neg \neg p$$

אבל... אם לוקחים את חצי כ"טוב", נקבל דברים שהם כן טאו' (במובן שהם מקבלים תמיד אחד או חצי). נשים גם לב שלמעשה כל מה שטאו' קלאסי הוא טאו' גם עכשיו.

## דוגמא

אנחנו בתמימותינו נחשוב ש:  $p \vdash_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} q$ . אבל זה לא נכון!

מה יהיה המודל שיראה זאת?  $v(p) = \frac{1}{2}, v(q) = 0$ .

למה זה קורה? האם אנחנו רוצים את זה? (כן)

אז סתירה בתיאוריה זה עובד מצויין, אבל לא כך בפרקטיקה. לפעמים יש לנו מאגר נתונים שמקבלי נתונים מכל מיני מקומות והם סותרים, למשל המאגר קיבל "ביבי יבחר" וגם "ציפי תבחר". מה נסיק מזה? שצריך להתקיף את איראן כי מסתירה נובע כל דבר? לכן זה בסדר לנו שמסתירה לא נובע כל דבר. ויש הרבה לוגיקות שסתירה לא נובע כל דבר.

## סיכום (כבר?)

- ראינו שבלוגיקה רב ערכית מתקבלת על ידי שמוסיפים עוד ערכי אמת (מספר סופי ואפשר גם אינסופי) - אז מכלילים את טבלאות האמת. למשל לקשר דו מקומי - פונ' שמקבלת את כל הזוגות האפשריים של ערכי האמת ומחזירה ערך אמת.
- צריך להחליט איזה ערכי אמת הם "מצויינים" ואלה לא ולפי זה מגדירים את יחס הנביעה.

אז אחרי שסיכמנו, נסכם שוב, בצורה פורמלית יותר:

- "לוגיקה רב ערכית" מוגדרת כשלשה  $\langle V, D, O \rangle$  כאשר:
- $V$  קבוצה (של "ערכי אמת"). בדרך כלל:  $\{0, 1\} \subseteq V$  (אפשר גם T, F. העקרון למעשה הוא  $|V| \geq 2$ )
  - $D$  קבוצה חלקית ממש ולא ריקה של  $V$  ("ערכי האמת המצויינים"). בדרך כלל:  $0 \notin V, 1 \in V$  (וזה גם מבטיח שהיא לא ריקה וקבוצה חלקית ממש).
  - $O$  היא קבוצה של טבלאות אמת לכל אחד מהקשרים של השפה.

ואז:

השמה  $v$  נקראת M-מודל של פסוק  $A$  אם  $v(A) \in D$  (ערך האמת של  $A$  מחושב לפי טבלאות האמת).  
 $T \vdash_M \varphi$  אם כל M-מודל של  $T$  הוא גם M-מודל של  $\varphi$ .

עכשיו נראה שימוש (הוא לא החשוב ביותר, אבל הוא שימוש):

נראה ש:  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$  לא יכיח ב-HPI. כלומר ש:  $\nvdash_{HPI} ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ .

איך נעשה את זה?

נקח לוגיקה תלת ערכית, שכל מה שניתן להוכיח ב-HPI תקף עבורה, וזה לא יהיה תקף עבורה. תהיה לנו כאן רק שלמות ללא תקפות. למעשה HPI לא שלמה עבור שום לוגיקה רב ערכית סופית. זה הרעיון הכללי של איך מראים שאיבר  $a$  לא שייך לקבוצה  $S$  - מוצאים תכונה שיש לכל איברי  $S$  ואין אותה ל- $a$ .  
 התכונה שלנו היא נכונות בלוגיקה התלת ערכית של גדל (זה לא אחד מה-3 שלמדנו עד עכשיו).

טבלת השלילה:

| $a$           | $\neg a$ |
|---------------|----------|
| 1             | 0        |
| $\frac{1}{2}$ | 0        |
| 0             | 1        |

גרירה: (במקום 3 על 3 נעשה משהו יותר יעיל, ניתן הגדרה על ידי נוסחא).

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ b & a > b \end{cases}$$

(ואז למעשה:  $\neg a = a \rightarrow 0$ , כלומר  $a$  גורר את השקר המוחלט)

אנחנו כמובן צריכים את ה"או" וה"גם" של הלוגיקה של גדל. (זה כמובן לא נזגר מהאחרים ואנו צריכים להגדיר את זה). אז:

$$a \vee b = \max\{a, b\}$$

$$a \wedge b = \min\{a, b\}$$

אם היה לנו רק 0 ו-1 היינו מקבלים את טבלאות האמת הקלאסית.

איך נוכיח את התקפות הזו כמובן? נראה כי:  
 - כל האקסיומות של HPI מקבלות ערך אמת מצויין.  
 - MP שומר על התוכנה הזו.

### שאלה פילוסופית

המטרה שלנו זה לתת סמנטיקה ל-HPI?  
 לא! כי אין שלמות. זה משהו יותר צנוע מה שאנחנו עושים  
 כאן. יהיו כאן גם דברים תקפים שהם לא נכונים בלוגיקה  
 האינטואיציוניסטית.

נראה:

1. אם  $\vdash_{HPI} A$  אז  $v(A) = 1$  לכל השמה  $v$  של הלוגיקה התלת ערכית של גדל. (המשמעות היא

שאנו לוקחים את 1 כערך אמת "מצויין" (יחיד)

2. קיימת השמה בלוגיקה הנ"ל (התלת ערכית של גדל)  $v_0$  כך ש:  $v_0[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \neq 1$ .

(אנחנו עושים כאן שימוש בסוגריים מרובעות [בהגדרה של 2], בהמשך השיעור נסביר למה ומתי אנחנו מחליט לעשות את זה)

### הוכחת 2

ההשמה:  $v_0(p) = \frac{1}{2}$   $v_0(q) = 0$ .

ואז:

$$\left( \left( \frac{1}{2} \rightarrow 0 \right) \rightarrow \frac{1}{2} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_0$   
 $\underbrace{\hspace{2.5cm}}_1$   
 $\underbrace{\hspace{3.5cm}}_{\frac{1}{2}}$

ולכן:  $v_0[(p \rightarrow q) \rightarrow p] = \frac{1}{2} \neq 1$ .

### הוכחת 1 (התקפות)

אז כמו שאמרנו, מראים לאקסיומות - אנו נעשה לאחד מהם. ואז צריך להראות שאם ל-  $A$  יש את התכונה ול-  $A \rightarrow B$  יש את התכונה אז ל-  $B$  יש את התכונה (כלומר ש-  $MP$  שומר את התכונה).

1. נניח של- A יש את התוכנה, ול-  $A \rightarrow B$  יש את התוכנה. נראה של- B יש את התוכנה.  
 תהי  $v$  השמה של הלוגיקה הנ"ל. אז מהנחתנו,  $v(A)=1$  וגם  $v(A \rightarrow B)=1$ . נסתכל מתי השוויון  
 האחרון יכול להתקיים. כיוון ש:  $v(A \rightarrow B)=1$  אז  $v(A) \leq v(B)$  או  $v(B)=1$  ובשני המקרים  $v(B)=1$ .

2. לכל אקסיומה  $\varphi$  של HPI מתקיים ש-  $V(\varphi)=1$  לכל השמה  $v$  בלוגיקה הנ"ל. עבודה טכנית (ויותר קשה מבדרך כלל כי יש יותר ערכי אמת - אז יש יותר השמות לבדוק..). אנו נראה זאת עבור 12. נראה אותו קודם:

$$(I2) \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

ברור שמספיק להוכיח שלכל  $a, b, c$  ערכי אמת (לאו דווקא שונים זה מזה) מתקיים:

$$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$$

החץ כאן הוא לא קשר של השפה! הוא לא בא בין שני פסוקים! אלא הוא פעולה על שני ערכי אמת. היינו צריכים למצוא סימון שונה לקשר ולפונ' פעולה שלו. אבל נשתמש באותו סימון ונזכור להבדיל ביניהם. (זו בדיוק הנקודה שהייתה לנו בשיעורים הראשונים, שהבדלנו בין  $v$  לבין  $v^*$  עד שהחלטנו להתבגר ולהפסיק עם זה).

כעת נראה למה זה נכון:

אבחנה: נשים לב:  $x \rightarrow y \geq y$ . למה? או שנקבל 1 שזה הערך הכי גדול, או שנקבל  $y$  שגם מקיים את אי שיוויון.

אפשרות א' -  $a \leq c$ :

$$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$$



אפשרות ב' -  $a > c$  :  
נחלק כאן לשתי אפשרויות .

אפשרות ב'1 -  $b > c$  :

$$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = (a \rightarrow c) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$$

Handwritten diagram showing the derivation of  $a \rightarrow c$  from  $b > c$  using logical rules. The expression is  $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$ . A bracket labeled 'y' is under  $(b \rightarrow c)$ . A bracket labeled 'x' is under  $(a \rightarrow b)$ . A bracket labeled 'y' is under  $(a \rightarrow c)$ . The result is  $a \rightarrow c$ .

וכיוון ש:  $y \leq x \rightarrow y$  נקבל ש:  $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$

אפשרות ב'2 -  $a > c \geq b$  :

$$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$$

Handwritten diagram showing the derivation of  $b \rightarrow c = 1$  from  $a > c \geq b$ . The expression is  $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$ . A bracket labeled '1' is under  $(b \rightarrow c)$ . A bracket labeled 'b' is under  $(a \rightarrow b)$ . A bracket labeled 'c' is under  $(a \rightarrow c)$ . The result is  $b \rightarrow c = 1$ .

כיוון ש-  $a > c$  אז  $a \rightarrow c = 1$  .  
כיוון ש-  $a > b$  אז  $a \rightarrow b = 1$  .  
ולכן:  $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) = 1 \rightarrow 1 = 1$  .  
אבל  $b \rightarrow c = 1$  כי  $b < c$  .  
בסה"כ:  $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) = 1$  , ולכן הכל 1.

אם למישהו ההוכחה של סעיף 2 בהוכחת 1 הייתה קשה, הוא יכול פשוט לבדוק את כל 27 האפשרויות ולראות שבכולם יוצא 1 בסוף.

האם השתמשנו פה בעובדה שיש 3 ערכי אמת? לא. אם אותה הגדרה של גרירה, יהיה אותו חישוב ויצא לנו אותו דבר. וכשיש עשרה מקרים שוב אפשר טכנית לבדוק שתמיד יוצא 1, אבל זה כבר באמת חופר ואולי כדאי להבין את מה שעשינו מי שחשב שכשיצטרך הוא יבדוק את כל המקרים...

למעשה אפשר לקחת כערכי אמת את כל המספרים הממשיים בקטע 0 עד 1 .  
והוכחת התקפות זו עדיין תהיה תקפה וההוכחה היא אותה ההוכחה!

זה (לקיחת הקטע [0,1] כערכי אמת) נקרא fuzzy logic (לוגיקה עמומה). בואו נדבר על זה קצת.

פרדוקס הקירח:

אז מה זה קירח? אדם שאין לו שערות על הראש. אז נקח אדם שאין לו שערות על הראש ונוסיף לו שיערה. האם הוא כבר לא קירח? לא – הוא עדיין קירח. וכך אפשר באינדוקציה להראות שאדם עם שיער שופע ויפה (בעל מספר סופי של שערות) הוא קירח.

אז אומרים שהמושג של קירח הוא מושג עמום. יש מקרים ברורים שכן, יש כאלה שלא, ויש כאלה עמומים - ספק כן ספק לא. למשל, מיקי ברקוביץ נחשב לא גבוה במונחים של כדורסל, אבל בחי' היום היום הוא נחשב גבוה. הטענה היא שרוב המושגים שכן אדם עובד איתם הם עמומים.

בלוגיקה עמומה הכוונה היא ש- 1 זה אמת מוחלטת (נניח אדם מעל 2 מ' הוא גבוה באופן מוחלט, בכל אמת מידה), 0 - שקר מוחלט (כל אדם מתחת ל- 1.2 מ' הוא לא גבוה) ועבור ערכי הביניים נקבל ערכים שונים. זה מזכיר הסתברות אבל זה לא (לא נכנס להבדל ביניהם).

יש כמה לוגיקות עמומות בסיסיות. אחת מהם היא של גדל שהיא בדיוק כמו שראינו. כל מה שתקף ב-HPI יהיה יכיח בה. זה עדיין לא שלם כי בלוגיקה של גדל זה תקף (נקבל אחד):  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$  אבל זה לא תקף אינט' (כדי להוכיח, שוב צריך סמנטיקה אחרת עם טבלאות אמת אחרות כדי להראות את זה).

---

כעת נעבור לחלק העיקרי בקורס. הנושא מעכשיו (ועד קרוב ממש לסיום) הוא:

## תחשיב הפרדיקטים - לוגיקה מסדר ראשון (2 שמות לאותו דבר)

התוספת העיקרית שאנו מוסיפים זה את הכמתים - לכל וקיים. אנו נלמד את זה עכשיו בצורה מסודרת (מה שהיה רק מכשיר בבדידה).

צורת הלימוד תהיה מאוד מקבילה למה שעשינו בתחשיב הפסוקים, רק שעכשיו הכל יהיה יותר מסובך. אז תחילה נציג את השפה (לפני שנתחיל לדבר על מה נובע ממה, מה המודלים וכו').

## שפות מסדר ראשון

מה פתאום שפות?! (אנחנו מתפללים על הרבים למי שלא הבין) יש כאן רבים כי אין לנו שפה אחת מסדר ראשון אלא הרבה. יש דברים שמשותפים לכולם, ויש כאה שמיוחדים לכל שפה ושפה. נראה זאת.

## המשותף לכל שפה מסדר ראשון

1. הקשרים המוכרים והידועים שלנו:  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ .

2. הכמתים:  $\exists, \forall$ . (אפשר להשתמש באחד להגדיר את השני בעזרת שלילה. דומה לזה שאפשר להשתמש רק בשני קשרים ולא בארבעה).

3. סוגר ימיני, סוגר שמאלי ופסיק:  $(, ), ,$  (אפשר עקרונות בלעדיהם - שיטת פולנית, אבל כדי שיהיה איזה שהוא סיכוי נבין מה שאנחנו כותבים כדאי להשתמש בסגורים ובפסיק).
4. קבוצה בת מנייה של משתנים:  $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots$  (בפרולוג זה כל מחזורות אלפא-נומרית שמתחילה באות גדולה. הבחירה מה משתנה זה לא מהותי, מה שחשוב זה שיהיה לנו מאגר בלתי נדלה ושנוכל להבדיל ביניהם). כמו בעבר, אנחנו צריכים משתנים עבור משתנים (כשרנצה להגיד "לכל שני משתנים..." לדוגמא). אצלנו הם יהיו  $x, y, z$ . כלומר הם יהיו המשתנים במטא שפה עבור המשתנים של השפה. הבלבול בין שני הדברים יכול להיות קריטי (מנסיון של אברון - יכולים לקבל תוצאות משונות שלא ציפינו לא רצינו).

## סיגנטורה

כמו כן, יש בכל שפה מסדר ראשון דברים נוספים שניתנים ע"י מה שנקרא הסיגנטורה של השפה (בעברית: חתימה. אנחנו לא נשתמש במושג בעברית) - הדברים היחודיים של השפה.

סיגנטורה: כל הדברים ב-א, ב של השפה שמייוחדים לה.

מה היא יכולה לכלול:

1. קבועים.
2. סימני פונקציה - כל אחד עם ה-arity שלו (arity = כמה קלטים הפונ' מקבלת. האם מדובר בפונ' דו-מקומית, חד-מקומית וכו')
3. סימני יחס - כל אחד עם ה-arity שלו. (יחס דו-מקומי כמו "=", תלת מקומי וכו')

- חייב להיות לפחות סימן יחס אחד.
- לא חייבים להיות קבועים.
- לא חייבים להיות סימני פונ'.

כל דבר יכול לסמן קבוע, סימן יחס וסימן פונ'. (אפשר להשתמש באותו סימן לשני דברים כל עוד לא יהיה בלבול).

סימונים רשמיים (באופן מעשי לא נשתמש בזה בכלל):

- הקבועים יהיו מהרשימה:  $c_0, c_1, c_2, \dots$ .
- סימני הפונ' יהיו מהצורה:  $f_k^n$  (כאשר  $n$  יתן את ה-arity, ו- $k$  מבדיל בין הפונ')
- סימני היחס יהיו:  $p_k^n$  (כאשר  $n$  יתן את ה-arity, ו- $k$  מבדיל בין סימני היחס)

סימון: אם  $\sigma$  (סיגמא) סיגנטורה אז  $L(\sigma)$  יסמן את השפה מסדר ראשון שמושרית ע"י  $\sigma$ . נסתכל עכשיו עם הדף ונראה סימנים משונים שנראים כמו  $i$  ו- $o$ . הן נקראות "איוטה" ו-"או-מיקרון". זה בא להגדיר 2 קטגוריות דיקדוקיות (בניגוד לתחשיב הפסוקים, בהן הייתה לנו קטגוריה אחת דיקדוקית). אז בלוגיקה מסדר ראשון יש לנו 2 קטגוריות דיקדוקיות / לשוניות עיקריות:

- א. שמות עצם (ש"ע):  $\tau$  (אמור להיראות כמו "איוטה")
- ב. נוסחאות:  $\phi$  (אמור להיראות כמו "או-מיקרון", והוא אכן נראה ככה)

בדף יש לנו דוגמאות לכמה סיגנטורות. הבה נעיף בהם מבט.

לדוגמא של תורת המספרים (PA - האריתמטיקה של פיאנו):  
פלוס: זה משהו שמקבל 2 דברים מ"איוטה", כלומר 2 שמות עצם, והוא מייצר (מחזיר) שם עצם. לכן פלוס הוא סימן פונ' דו - מקומי. סימן פונ' כי הוא מחזיר שם עצם, דו- מקומי כי מקבל 2 ש"ע.  
S: סימ פונ' חד- מקומי. (בא לסמן את פעולת העוקב)  
=, >: הם מקבלים 2 ש"ע ומחזירים נוסחא. הם סימני יחס דו-מקומיים. באמצעות סימני היחס יוצרים נוסחאות.

סיגנטורה של הגיאומטריה האוקלידית:  
אין קבועים ואין סימני פונ'.  
אין קבועים כי אין שום נקודה במישור האוקלידי שיש סיבה לציין אותה (אין צירים, ולכן אין את ראשית הצירים לדוגמא). מה שכן יש - זה יחסים.  
On: במובן האינטואיטיבי, אם הראשון נקודה והשני ישר זה האם הנק' על הישר (זה לאו דווקא נכון אינטואיטיבית לגבי המקרים האחרים: נקודה-נקודה, ישר-ישר וכו')  
 $\approx$ : סימן הקונגרוואנציה. בביהס בדרך כלל מסמנים ב- " $=$ " : " $AB=CD$ ". הן לא נקודות וגם לא ישרים, אלא קטעים. נשים לב שזה יחס 4-מקומי.

גם כאן וגם בסיגנטורה של תורת הקבוצות, היה אפשר להתספק בסיגנטורה חסכונית יותר.

סימון:  $F_v[E]$  - קבוצת המשתנים החופשיים ב- E (נגדיר אותו בהמשך פרטנית)  
למה סוגריים מרובעים (רמזנו קודם)? אז תחילה נגיד שזה סימון רק בקורס הזה.  
בסוגריים העגולים אנחנו משתמשים בכדי ליצור הרבה דברים - נוסחאות, ש"מ, שהם דברים בתוך השפה. ולכן נשתדל בהפעלה של סוגריים במטא שפה להשתמש בסוגריים מרובעים וכך יהיה לנו יותר קל להבדיל. אז כאן זה הוא סימון במטא שפה.

בהנתן  $\sigma$ , קבוצת ש"ע של  $L(\sigma)$  מוגדרת באופן הבא:  
א. כל קבוע ב-  $\sigma$  הוא ש"ע של  $L(\sigma)$   
ב. כל משתנה הם ש"ע של  $L(\sigma)$

עד כאן שמות העצם הפשוטים ביותר, ועכשיו איך אנחנו יוצרים שמות עצם מורכבים יותר מהם?  
אם אין סימני יחס, אלה כל שמות העצם שיש לנו.  
אם אין קבועים אז בכלל רק המשתנים הם שמות העצם.

ג. אם  $f: \ell^n \rightarrow \ell$  הוא סימן פונ' של  $\sigma$  ו-  $c_1, \dots, c_n$  ש"ע של  $L(\sigma)$  אז  $f(c_1, \dots, c_n)$  גם ש"ע של  $L(\sigma)$ .

מה עם המשתנים החופשיים בכל מקרה ומקרה? נגדיר:

ב- א. אין משתנים חופשיים:  $F_v[c] = \emptyset$ .

ב- ב.  $F_v[x] = \{x\}$ .

ב- ג.  $F_v[f(t_1, \dots, t_n)] = F_v[t_1] \cup \dots \cup F_v[t_n]$ .

נסתכל לרגע על:  $\{x \mid x^2 + 3 > 5\}$

כל הדבר הזה הוא ש"ע (שהשתמשנו בו הרבה בבדידה), אך הוא לא שם עצם בלוגיקה מסדר ראשון (כי יש בפנים נוסחא, ולא רק שמות עצם). לכן הוא לא ש"ע בשפה שלנו. אבל זה בסדר כי אפשר להסתדר בלי זה (ונראה בעתיד איך).

וכעת לקטגוריה הבאה - קטגוריית הנוסחאות:

בהנתן סיגנטורה  $\sigma$ , קבוצה הנוסחאות של  $L(\sigma)$  מוגדרת באופן הבא:

א. אם  $\rho: \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{O}$  (יש לקרוא: P הוא סימן יחס n-מקומי) ו-  $t_1, \dots, t_n$  הם ש"ע אז  $\rho(t_1, \dots, t_n)$  היא נוסחא של  $L(\sigma)$ . לנוסחא זו קוראים נוסחא אטומית.

מה הם המשתנים החופשיים פה? נגדיר:  $F_v[\rho(t_1, \dots, t_n)] = F_v[t_1] \cup \dots \cup F_v[t_n]$  ולכן חייבים לפחות סימן יחס אחד כדי שיהיו נוסחאות. (דרשנו את זה לפני 2 עמודים)

ב. אם פ' ופס' נוסחאות אז גם  $\neg \psi, \psi \rightarrow \psi, \psi \vee \psi, \psi \wedge \psi$  הם נוסחאות.

לגבי המשתנים החופשיים:

$$F_v[\neg \psi] = F_v[\psi]$$
$$F_v[\psi * \psi] = F_v[\psi] \cup F_v[\psi] \quad * \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$$

ג. אם פ' נוסחא של  $L(\sigma)$  ו- x משתנה אז  $\forall x \psi$  ו-  $\exists x \psi$  הם נוסחאות של  $L(\sigma)$ .

המשתנים החופשיים:  $F_v[\exists x \psi] = F_v[\forall x \psi] = F_v[\psi] - \{x\}$  (חיסור של קבוצות).

סיימנו את הגדרת השפה.

עכשיו אפשר להוכיח שבהנתן מחזורות אפשר בצורה יחידה לזהות האם היא שם עצם או פונ' וכו'. אפשר לכתוב תכנית מחשב עשה את זה (כמובן שכבר עשו את זה). אבל אנחנו פשוט נאמין לזה.

אז סיימנו את החלק התחבירי בשפות. וכעת לחלק הסמנטי - מה המובן של השפות האלו?

ש"ע - כשמו כן הוא.

לגבי נוסחאות - זה הדבר שנרצה לדעת האם הם נכונות או לא.

בתחשיב הפסוקים היו לנו השמות שהיו ה"מובן" שלנו.

גם אנחנו צריכים תחילה לתת מובן לסיגנטורה לפני שאנחנו מדברים על דברים אחרים. לשם כך, נצטרך תחילה נצטרך לדבר על תחום.

הגדרה: תהי  $\sigma$  סיגנטורה. מבנה (Model או Environment או Structure)  $\mathcal{M}$  [אצלנו לעולם לא נשתמש כאן במושג מודל! אצלנו זה שמור כדי להגיד שמשוואה הוא מודל של משוואה אחר] הוא זוג:  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$  כאשר:

D - (דומיין) קבוצה לא ריקה (שנקראת תחום של המבנה) [אנחנו מחליטים שהיא תהיה לא ריקה, ואולי בהמשך נראה למה שנרצה להניח את זה].

I - (אינטרפרטיישן) פונקציה (שנקראת פונקציה פירוש) שהתחום שלה הוא  $\sigma$ . אנחנו לא כותבים טווח כי זה לא נוח (לדברים שונים היא נותנת דברים שונים). היא נותנת פירוש לכל אחד ואחד מאיברי  $\sigma$ . כך ש- I נותנת/מחזירה: (ב-  $\sigma$  יש שלושה דברים ולכן יהיו כאן 3 נקודות)

1.  $I[c] \in \mathcal{D}$  אם c קבוע.

נסתכל על הדוגמא של המספרים הטבעיים. D יהיה קבוצת המספרים הטבעיים. ופירוש הסימבול 0 יהיה המספר הטבעי 0 (אפשר גם להחליט 7 ואז זה יהיה מבנה אחר). c הוא משוואה סינטקטית ו-  $I[c]$  הוא הפירוש שלו. אפשר גם D - קבוצת בני האדם ו- 0 יהיה ראש המשלה.

2.  $I[f] \in \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$  אם f סימן של פונ' n-מקומית של  $\sigma$ .

3.  $I[p] \in \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{O}$  אם p הוא סימן יחס n- מקומי של  $\sigma$ .

לגבי 3: לסימן יחס צריך להתאים יחס n-מקומי על D. אז יש לנו שתי אפשרויות, מה שכתבנו ב- 3, או

אפשרות אחרת: (נזכר שבבדידה עשינו את זה כך - קבוצה של n-יות):  $I[p] \subseteq \mathcal{D}^n$ .

הנושא החדש הזה (לוגיקה מסדר ראשון – FOL) עשוי מעט לבלבל, לכן נעשה חזרה קצרה ומהירה.

## הגדרת השפה

יש את המשותף לכל שפה ויש את הסיגנטורה (הדברים המיוחדים לכל שפה).

המשותף לכל שפה מסדר ראשון

1. הקשרים:  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ .
2. הכמתים:  $\exists, \forall$ .
3. סוגר ימיני, סוגר שמאלי ופסיק:  $(, ), ,$ .
4. קבוצה בת מנייה של משתנים:  $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots$ .

הסיגנטורה

מה היא יכולה לכלול:

1. קבועים (לא חובה)
2. סימני פונקציה (לא חובה) [ישמשו ליצירת שמות עצם]
3. סימני יחס (חובה לפחות אחד) [ישמשו ליצירת נוסחאות]

יש לנו 2 קטגוריות דיקדוקיות:

- א. שמות עצם (ש"ע):  $\varphi$  ("איוטה")
- ב. נוסחאות:  $\psi$  ("או-מיקרון")

הגדרת  $L(\sigma)$  - השפה מסדר ראשון המושרית על ידי הסיגנטורה  $\sigma$ :

בהנתן  $\sigma$ , קבוצת ש"ע של  $L(\sigma)$  מוגדרת באופן הבא:

- א. כל קבוע ב- $\sigma$  הוא ש"ע של  $L(\sigma)$ .
- ב. כל משתנה הוא ש"ע של  $L(\sigma)$ .
- ג. אם  $f: \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}$  הוא סימן פונ' של  $\sigma$  ו-  $c_1, \dots, c_n$  ש"ע של  $L(\sigma)$  אז  $f(c_1, \dots, c_n)$  גם ש"ע של  $L(\sigma)$ .

בהנתן סיגנטורה  $\sigma$ , קבוצה הנוחסאות של  $L(\sigma)$  מוגדרת באופן הבא:

- א. אם  $\rho: \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{O}$  ו-  $t_1, \dots, t_n$  הם ש"ע אז  $\rho(t_1, \dots, t_n)$  היא נוסחא של  $L(\sigma)$  (זו היא נוסחא אטומית).
- ב. אם  $\varphi$  ופסי נוסחאות אז גם  $\neg \varphi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \wedge \psi$  הם נוסחאות.
- ג. אם  $\varphi$  נוסחא של  $L(\sigma)$  ו-  $x$  משתנה אז  $\forall x \varphi$  ו-  $\exists x \varphi$  הם נוסחאות של  $L(\sigma)$ .