

רשימת בעיות בסיבוכיות

כל בעיה מופיעה במחלקה הגדולה ביותר *שידוע בוודאות* שהיא נמצאת בה, אלא אם כן מצוין אחרת. כמובן שבעיות ב-L נמצאות גם ב-P וב-PSPACE למשל, אבל אם תכתבו את זה כתשובה במבחן לא תקבלו יותר מדי נקודות (וכנראה גם לא מספיק נקודות).

הבעיות כתובות בנוסח הכרעה, אך לרבות מהן יש גרסאות אופטימיזציה.

בעיות ב-P

Primality: בהינתן N , האם הוא ראשוני? (ב-P בזכות Agorwal, Kayena, Saxena, 2002)

Compositeness: בהינתן N , האם הוא מספר מורכב (לא ראשוני)? (גם בזכות AKS)

DNF-SAT: בהינתן נוסחת DNF, האם היא ספיקה? (בסך הכל בודקים אם יש סוגר עם ליטרל ומשלימו)

Linear Programming (LP): בהינתן מערכת אי-שוויונים לינארית מעל n משתנים, האם יש למערכת פתרון בממשיים? (ב-P בזכות אלגוריתם האליפסואיד, 1971. לא להתבלבל עם ILP)

Semi-Definite Programming (SDP): בהינתן מערכת אי-שוויונים מעל n וקטורים בגודל n , האם יש למערכת פתרון? (ולמעשה, בדרך כלל נשאל מהו. גם ב-P בזכות אלגוריתם האליפסואיד)

Graph Isomorphism: בהינתן שני גרפים, האם הם איזומורפיים? (כלומר, האם זה בעצם אותו גרף עם שינוי שמות הקודקודים).

* זו שאלה פתוחה האם הבעיה ב-P, וכמו כן האם היא ב-NPC. מאמינים שהיא ב-P.

בעיות ב-NPC

TMSAT: בהינתן רביעייה $\langle \alpha, x, 1^n, 1^t \rangle$, האם קיים $w \in \{0,1\}^n$ כך שהאלגוריתם M_α עוצר על הקלט $\langle x, w \rangle$ ומקבל תוך t צעדים?

SAT: בהינתן נוסחת CNF, האם קיימת השמה אשר מספקת אותה (כלומר מספקת את כל ההסגרים שלה)? (נכון גם לגבי kSAT ו-EkSAT לכל $k \geq 3$)

קבוצה בלתי תלויה (IS): בהינתן גרף ומספר k , האם יש קבוצת הקודקודים בלתי תלויה (אין קשת בין אף קודקוד לאף קודקוד אחר בקבוצה) בגודל k ? (בעיית מקסימיזציה)

בעיית קליק (Clique): בהינתן גרף ומספר k , האם יש קליקה (קבוצה בה יש קשת בין כל שני קודקודים בקבוצה) בגודל k ? (בעיית מקסימיזציה)

מסלול המילטון (HamPath): בהינתן גרף, האם יש מסלול שמבקר בכל קודקוד פעם אחת בדיוק?

מעגל המילטון (HamCycle): בהינתן גרף, האם יש מעגל שעובר בכל קודקוד פעם אחת בדיוק?

3-Coloring (3COL): בהינתן גרף, האם ניתן לצבוע את קודקודיו בשלושה צבעים כך שאף קשת לא מחברת בין שני קודקודים באותו צבע?

Travelling Salesman Problem (TSP): בהינתן גרף עם משקולות על הקשתות ומספר k , האם קיים מעגל המילטון שמשקלו לכל היותר k ?

Vertex Cover (VC): בהינתן גרף ומספר k , האם קיימת קבוצת קודקודים בגודל k הנוגעת בכל קשתות הגרף?
Set Cover (SC): בהינתן קבוצה U , משפחה של תתי-קבוצות שלה F , ומספר k , האם ניתן לכסות את U באמצעות לכל היותר k תת-קבוצות מ- F ?

Integer Programming (IP): בהינתן מערכת אי-שוויונים לינארית מעל n משתנים, האם יש למערכת פתרון בשלמים? (לא להתבלבל עם LP!)

מספר כרומטי (χ): בהינתן גרף, מהו המספר המינימלי של צבעים הנדרשים על מנת לצבוע את הגרף באופן חוקי? (או במילים אחרות, מהו המספר הכרומטי של הגרף)

Max-2SAT: בהינתן נוסחת 2CNF ומספר k , האם ניתן לספק לפחות k מתוך ההסגרים שלה?

בעיות ב-coNP

Factoring: בהינתן מספר N ומספר k , האם יש מחלק ראשוני של N בתחום $2 \dots k$?

CNF-EQUIV: בהינתן שתי נוסחאות CNF ψ , ϕ , האם הנוסחאות שקולות לוגית? (מחזירות אותו ערך אמת עבור כל השמה)

בעיות ב-L

undirected-s,t-connectivity (UCONN): בהינתן גרף לא מכוון וקודקודים s, t , האם יש מסלול מ- s ל- t ?

בעיות ב-NL

s,t-connectivity (CONN): בהינתן גרף מכוון וקודקודים s, t , האם יש מסלול מ- s ל- t ?

2SAT: בהינתן נוסחת 2CNF, האם היא ספיקה? (כלומר האם ניתן לספק את כל ההסגרים שלה)

בעיות ב-PSPACE

SPACETM: בהינתן שלישייה $\langle \alpha, x, 1^n \rangle$, האם M_α מקבלת את x תוך n צעדים?

TQBF: בהינתן נוסחא מכומתת לחלוטין, האם היא אמת?

MAX-IS: בהינתן גרף ומספר k , האם גודל ה-IS הגדול ביותר בגרף הוא k ? (בעיה זו אינה PSPACE-שלמה. היא ב-DP, ולכן היא ב- Σ_2^P וב- Π_2^P , ולפיכך בתוך ההירארכיה הפולינומיאלית. לא ידוע שהיא ב-NP)

בעיות ב-EXP

EXPCOM: בהינתן שלישייה $\langle \alpha, x, 1^n \rangle$, האם M_α עוצרת תוך 2^n צעדים ומחזיר 1?

בעיות לא כריעות

UC: בהינתן קלט α , האם $M_\alpha(\alpha)$ עוצרת ומחזירה 0?

בעיית העצירה: בהינתן קלט α , האם המכונה M_α עוצרת? אפשר גם להגדיר עבור קלט מסוים של M_α .

Post Correspondence: בהינתן מספר סופי של "אבני דומינו" עם מחרוזת עליונה ומחרוזת תחתונה, האם אפשר לסדר את אבני הדומינו כך שהמחרוזת העליונה (משורשרת) תהיה זהה לזו התחתונה?

בנוסף לכל הבעיות פה, תמיד ניתן לייצר שפה מכל בסיבוכיות שתוצו באמצעות משפט הירארכיית הזמן ומשפט הירארכיית המקום.

קירובים

Vertex Cover: 2-קירוב (פשוט לבחור קודקודים חדשים עד שנגמרות הקשתות)

Travelling Salesman Problem: לא קיים אף קירוב פולינומיאלי לבעיה זו.

Travelling Salesman Problem עם אי-שוויון המשולש: 1.5-קירוב (בעזרת עץ פורש מינימלי וזיווג של שאר הקשתות. ראינו גם 2-קירוב שמשתמש רק בעץ פורש מינימלי).

Set Cover: $\ln(S)$ -קירוב, כאשר S היא הקבוצה הגדולה ביותר ב- F (באמצעות אלגוריתם חמדן. הוכחנו שהוא $\log_2$ -קירוב, $\ln$ -קירוב ולבסוף $\ln(S)$ -קירוב).

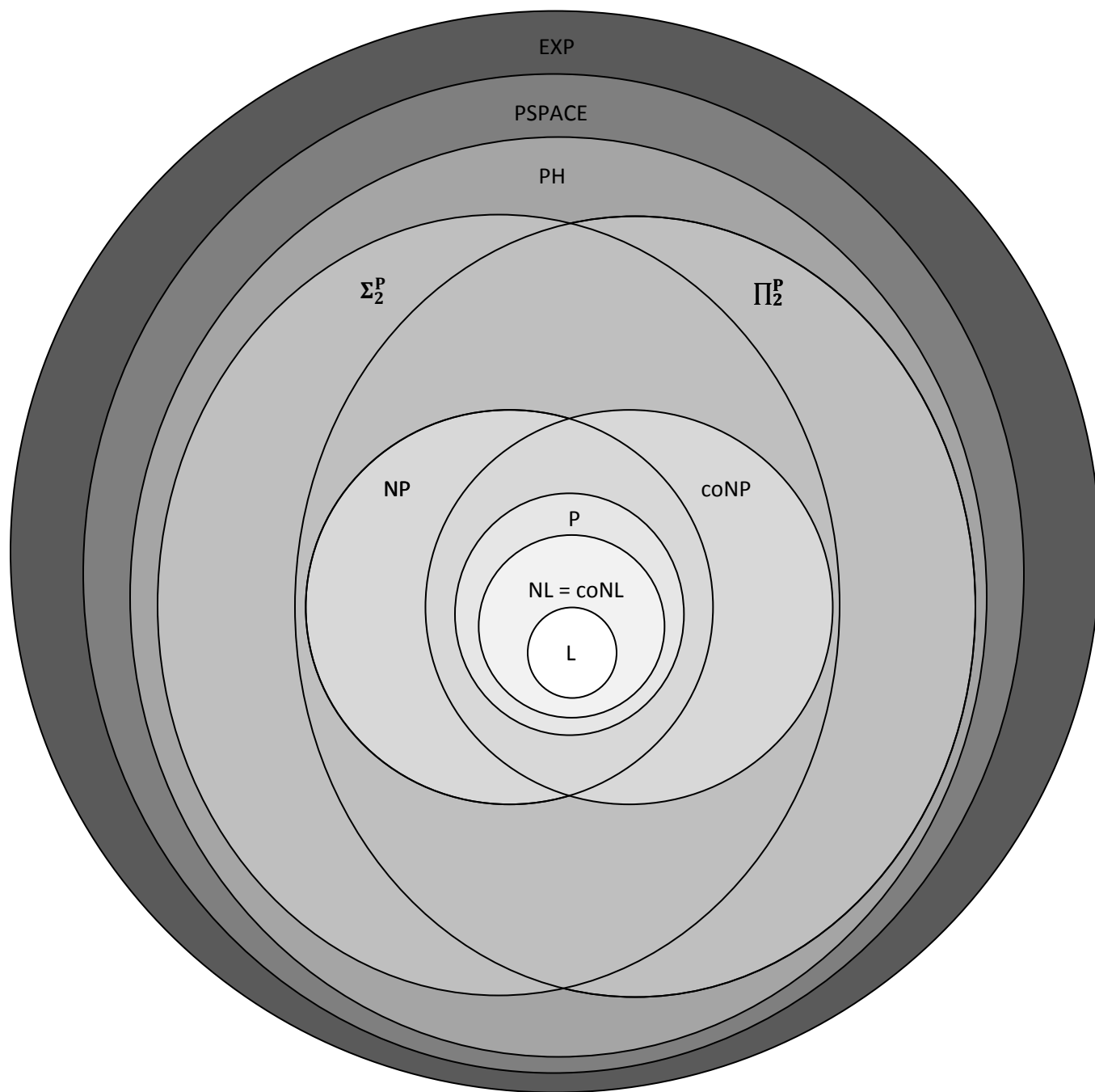
3SAT: 7/8-קירוב (הקירוב הוא דה-רנדומיזציה של השיטה ההסתברותית. אין קירוב טוב מזה לפי משפט ה-PCP)

Max-2SAT: 55/56-קירוב (רדוקציה מ-3SAT)

IS: לא ניתן לקרב עבור אף סדר קבוע (לפי רדוקציה מ-CSG)

מספר כרומטי: לא ניתן לקרב עבור אף סדר קבוע (לפי רדוקציה מ-CSG q)

להלן תרשים של מחלקות הסיבוכיות השונות, עד כמה שידוע לנו:



המחלקה BPP אינה מופיעה פה, על אף שהיא מחלקה חשובה שעסקנו בה, מכיוון שלא ניתן לצייר דיאגרמת וון הכוללת אותה ותהיה נכונה בוודאות. למשל, לא ידוע אם היא מכילה את NP, מוכלת ב-NP או אף אחד מהשניים (או שניהם?). עם זאת, כן ידוע כי היא מכילה את P ומוכלת ב- Σ_2^P

שאלות פתוחות

התרשים בעמוד הקודם מניח כי כל שתי מחלקות שלא הוכחו כזהות הן שונות. להלן רשימת השאלות הפתוחות לגבי שקילות מחלקות, מנוסחת בקצרה ובאופן שקל לזכור:

- $NP = EXP$
- $P = PSPACE$
- $L = PH$
- כמובן שישנם שאלות רבות וחשובות נוספות, אך כולן נובעות מאפשרויות אלה, כגון: $P=NP$, $NP=coNP$.
וכן: $P=PSPACE$, $PH=PSPACE$, $L=NL$.

מצד שני, אנחנו יודעים בוודאות כי:

- $P \neq EXP$
- $NL \neq PSPACE$