

סיכום - שיעור 9

משפט השני של כרמל

כשנאמרו שקשה הוא C-אלה (א מחלקה), הנכר גלוי בסוג הדיוקנה.
 ניתן להפיק מה ש"א אין סוג ידועות ואיננו יכולים להפיק מה ש"א
 אם זה שמתן. בקורס לא נשתן הדיוקנה בול"ט אלא אנחנו יכולים להפיק
 להפיק ב"כ. סבור המחלקה ל, דיוקנות בול"ט הן כי חלק גדול של ה"א, וכן השאנו
 "מתן" בהן. כשהוכחנו שכל הקורס, נחשו אורך הישר ונשאל הדיוקנה בול"ט.

מסלול אלמה PSPACE

למה ש-PSPACE נחשב מחלקה לא נחלקה (למה ש-P, NP, PA, ...)
 אנחנו צריכים לא יודעים להוכיח ש-PSPACE ≠ P (אם כי זה
 נחשב לא סביר).

כפי שבאמרו NP חולקים על SAT, Clique, HamCycle וכו'.
 נראה להכיר את PSPACE. לפני שזכר בעיר שהיא PSPACE
 שלה, יתן נאמר (בלי להוכיח) שבאופן כללי בעיר PSPACE
 אומר הן בעיר שדיוקנה לא נחשב מהר והשקיו (למה)
 הכחמה של שיקים צא, ש וכו'.

הוכחה הוכחנו שהבעיה בעיר היא PSPACE-אלמה:

$$SPACE_{TM} = \{ \langle M, w, k \rangle \mid \text{M מקבלת } w \text{ ב- } k \text{ מקום} \}$$

נצטרף נוסחה מילואה (לא מקומה) (למה) היא נוסחה

$$\text{אם צרכה: } \underbrace{\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\text{נוסחה מילואה}} \cdot \underbrace{\forall x_1 \exists x_2 \dots \forall x_n}_{\text{אם צרכה}} \cdot \underbrace{\forall x_1 \exists x_2 \dots \forall x_n}_{\text{אם צרכה}}$$

$$\text{אם צרכה: } \underbrace{\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\text{נוסחה מילואה}} \cdot \underbrace{\forall x_1 \exists x_2 \dots \forall x_n}_{\text{אם צרכה}} \cdot \underbrace{\forall x_1 \exists x_2 \dots \forall x_n}_{\text{אם צרכה}}$$

$$\text{אם צרכה: } \underbrace{\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\text{נוסחה מילואה}} \cdot \underbrace{\forall x_1 \exists x_2 \dots \forall x_n}_{\text{אם צרכה}} \cdot \underbrace{\forall x_1 \exists x_2 \dots \forall x_n}_{\text{אם צרכה}}$$

בעיה של SAT היא לקרר בלתי של (נסתה מאלגוריתם פולינומיאלי)
 כי כל ~~בעיה~~ בעיה היא E.

נציג את TQBF עתה שיהיה כל הנוסחאות ~~של~~
 מבוטאות עתה לכן את.

(במשחקים בהם שחקנים מתחילים גורם, בדרך כלל נהוג ש
 עברנו על האלה "הוא קיים" בעצם ~~הוא~~ האופן (אולי) כי האם
 בעצם אין (אולי) קיים בעצם איש (אולי) ... כי שאני מרצה"
 ואכן הם בדרך כלל ה- PSPACE ושל PSPACE-אולי).

ערה $TQBF \in PSPACE$

הוכחה נראה שהנוסחה הקורסיבית לעצמן TQBF. בהינתן

$$\exists x_1, \exists x_2, \dots, \exists x_n. \phi(x_1, \dots, x_n)$$

כאשר ϕ נוסחה שאינה מ, הסברנוצורה קורסיבית

כל הנוסחה למקרה ע"י השם F - x_1 ופולינום

למקרה ע"י השם T - x_1 . הסברנוצורה אולי

אם הקריאה החזרה TRUE במקרה של שם x_1 אולי

או אולי לעצמה שם החזרה TRUE במקרה של $\exists$

כאשר שאנו מציגים עתה כלל שם (אולי שחקן)

צריך כעת לראות את ערכה.

העקרון שהענינו בו הוא $O(m)$ כי עומק הקורסיב

הוא, וכל בנקודה נעשה ה- $O(m)$ לשחקן מקומי.

~~הוכחה: נראה שיש לנו אלגוריתם פולינומיאלי~~

הוכחה: שיהיה את סבוכות העקרון $O(m+n)$
 ראה (בהוכחה): טבלת פולינום ופולינום פולינום

~~הוכחה~~

נראה שהשאלה האם הקבוצה הזו היא לא PH - הסיבה
 היא שיש לה בעיה ב- PA שיהיה לא יעילה $\sum_i^p$ (מכיוון
 קבוצה) מכיוון ש- PH היא האחרון אליה, לפי, מספר הכיתובים
 כך בעיה ב- PH הוא קבוצה בעיה אחר, יש (n) סוגי.

$TQBF \in PSPACE$ -COMPLETE (Coen)

הוכחה נניח נבדוק $TQBF$ ב- $PSPACE$, נראה שהיא $PSPACE$
 קשה. נראה L ב- $PSPACE$ שזה לאהי ב- $PSPACE$.
 מכיוון שהיא $L \leq_p TQBF$

(יכולנו להוכיח גם בדיוקנה צורה אחר, אך זה היה מסורסן
 יחד ואין צורך. בדיוקנה סוף למכונה לנו סוף
 לפי ההוכחה יש מ"ל M שלמה של L במקום
 $O(n^2)$ עמודי פוליון כלשהו (n^2) .

נראה אין צורך G קדם $\sim \text{צורה}$ ולמה לא צורתה
 מכונה מחולקין ψ באחד $O(n^2)$ כך L מ
 לקבל את x אחר ψ נוסח אחר.

הא $G_{M,x}$ של הקונסטרנטים של המכונה M ב
 קדם x . אחר כך הוא עזים (אקסטרנסיבלי) ולא
 נוסף לשאר או מחשבה מולו במקום סוף. עם זאת, יצא
 קודקוד הוא ללא $G_{M,x}$ האחר ואם סוף. לכן נוסף
 שבעצם $G_{M,x}$ האחר נקבעה ולמה קשה ואם לא.

* למען הבהירות
 נוסף קדם L -
 accept מכונה
 מנהל ממשל
 הקודקוד אחר
 זה לא חלוק

נבדוק ψ שקודקוד האם קדם יש מסוף L - start
 (קודקוד גלוי הבהירות) accept - (קודקוד מנהל מקבל).
 בקודקוד שקודקוד ψ מקודקוד האם יש מסוף האורך
 (n^2) (אחר האחר) *

$$: \frac{1}{110}$$

$$\Psi = \exists c_1. \exists c_2. \exists c_3. \dots \exists c_{2^{|\text{Seq}|}}. (c_1 = c_{\text{start}}) \wedge (c_{2^{|\text{Seq}|}} = c_{\text{accept}}) \wedge \bigwedge_{i=1, \dots, 2^{|\text{Seq}|}-1} \varphi(c_i, c_{i+1})$$

הנהגת מ"ד קולק
הנהגת מ"ד קולק
הנהגת מ"ד קולק
הנהגת מ"ד קולק
הנהגת מ"ד קולק

המשפט (8.9) מוצקת הכל יס קול ל- α - δ - ϵ נתן
 עכשיו אנו הוכחנו קיומן (מציג אקסמפלים
 של העקבות (8.9)).

התוספת נכנסה אל המיקר אקספוזיטור. (ואכן לא ניתן לבנות
אתה במשך כול'!). למעשה, תיקון של שטח קטן אינו
הדיוק. זה עבד עבור SAT כי שרצון להראות שהיא אלה
למחמור עד שגם היה כול'. לכן, נוסח SAT היסודי
של שטח של מספר גדול. נרצו שגם ~~הוא~~ יכולתו
על נוסח TQBF.

210°

1. נגדיר הירקוס'ה נוסחה $\Psi_i(a, b)$ לקצתה Ψ_i של Ψ_0 באופן

$$\Psi_i(a, b) = \Psi_{i-1}(a, b) + \Psi_{i-1}(b, a) - \Psi_{i-1}(a, a) - \Psi_{i-1}(b, b)$$
 2. נקח Ψ להיות $\Psi_{\text{sum}}(\text{start}, \text{accept})$.
 עבור Ψ הירקוס'ה נגדיר $\Psi_0(a, b) = \Psi(a, b)$ (כלומר
 (זאת יש קצת).

דפדפן מקורס'ה (Savitch על העלם)

$$\Psi_i(c_1, c_2) = \exists D. \Psi_{i-1}(c_1, D) \wedge \Psi_{i-1}(D, c_2)$$

[illegible]

הנאמרת נכונה, אך עדיין מקסימום של (כא) שם מוגדר את
הנאמרת ב. הנה. נראה שהיא חלק מהמשפט E ולכן
ש. לא מוגדר שם בלבד.

אם מתחילים עם הניקוד שיהיה את כל הניקודים לפולי-
 נומים עם הקציה הבאה: נניח שמתן עבור הניקודים ξ :
 $\xi(2)=0 \vee \xi(3)=0$, אז למעשה את ξ זה ממש מסובך.
 איך אנחנו יכולים למצוא אלמנט הקבוצה אחר. אין אפשרות
 באמת? כנראה לא. הניסוח: $\xi(x)=0 \quad \forall x \in \{2,3\}$.
 אם הניסוח זה נמצא הניסוח.

ניסוח 3

נראה באמצעות יקוסיים מתקדמים, אך נראה את ξ ב-
 יקוסיים (נראה את הקבוצה וזהו $\Psi = \Psi_{\text{SWS}}$).

$$\Psi_i(c_1, c_2) = \exists D. \forall (D_1, D_2) \in \{(\emptyset, \emptyset), (D_1, c_2)\}. \Psi_{i-1}(D_1, D_2)$$

הניסוח זהו נכון (היה שקולה לניסוח בשלבים הקודמים) ואם בולט/נורמליזציה
 אם נרצה להיות מדויקים וזה יהיה בדיוק TBCF (כי זה האמת
 אמר עם ϵ) נוכל למצוא את הקורה שקולה:

$$\exists D. \forall D_1, \forall D_2. ((D_1 = c_1) \wedge (D_2 = \emptyset)) \vee ((D_1 = \emptyset) \wedge (D_2 = c_1)) \vee \Psi_{i-1}(D_1, D_2)$$

(הניסוח זה השתנה במקלות $\bar{A} \vee B \equiv A \rightarrow B$, כלומר, אז
 D_1, D_2 הם אמת או הפסולות "משפטים אמיתיים", אז צריך להתקיים עליהם
 התנאי Ψ_{i-1}).



אנאליזת קירוב

Vertex Cover: בהינתן G , האם קיימת קבוצת קווקוז
גודל k שסומרת את הקשתות?

זה עשוי הסתמך על בעיה החתלה. סתם נסתכל עליה בבעיה
אופטימלית.

בעיה האופטימלית VC: בהינתן G , מצא קבוצת קווקוז C
שסומרת את הקשתות וקטנה כל האפשר.

האין שם החתלה NP-קשה ע"י רבוקציה $Independent Set$,
אכן או בעיה האופטימלית (אחר יכלו להצביע על האניגם)
ואתה לא בעיה הכבדה.

אלאריז חמין (Greedy) יבחר את בעיה הקווקוז
הכי גדולה בעלת מינימום של קשתות או מינימום, ואחר
הוא באמצע צורה יחס הקירוב * של האלגוריתם הוא $\log n$.

~~הבעיה~~

הבעיה VC היא בעיה NP-קשה. (אם כי יש אלגוריתם גרידי)
הבעיה VC היא בעיה NP-קשה. (אם כי יש אלגוריתם גרידי)
הבעיה VC היא בעיה NP-קשה. (אם כי יש אלגוריתם גרידי)

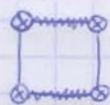
אם נסתכל על אלגוריתם קירוב אחר, שמתן לנו
יחס קירוב 2.

האלגוריתם

נבחר באופן שרירותי קשת. (אם קשת נבחרת שיש לה שני קצוות
חופפים, נבחרת קשת אחרת). נבחר קשת אחרת. (אם קשת נבחרת
שיש לה שני קצוות חופפים, נבחרת קשת אחרת). נבחר קשת אחרת.
נבחר קשת אחרת. נבחר קשת אחרת. נבחר קשת אחרת.



$$\begin{aligned} \text{ALG} &= 6 \\ \text{OPT} &= 4 \\ \text{ratio} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{ALG} &= 4 \\ \text{OPT} &= 2 \\ \text{ratio} &= 2 \end{aligned}$$

כיוון האלגוריתם ברורה. אז הייח נעשה
קטן לא נעשה קטן מהו הסקורדיון שלו
אז הייח לא קטן לא נעשה קטן
שבתנו ויש הייח עצמים.
פולינומילי היא על ברורה.
חלק נוסף: יחס הקירוב ≥ 2 :

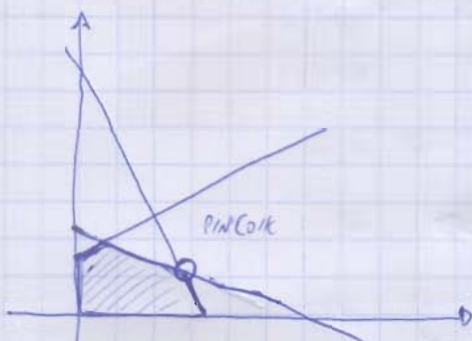
$$|\text{ALG}(G)| \leq 2 \cdot |\text{OPT}(G)|$$

הוכחה עם קטן $\{z_i\}$ שבתנו, האובייקט חייב להיות לפחות
מתן של הקורקורדיון z_i . מכיון של הקטן לא
כבר, נוקט $|\text{OPT}(G)| \geq |M|$ (כאשר M הוא
קבוצת הקטן שבתנו). נסיון הוכחה ע"י
 $|\text{ALG}(G)| = 2|M|$

תכנון ליניארי (Linear Programming)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 - x_2 \geq -1 \end{aligned}$$

מציאת הערך



הבעיה הפסד ציפה היא צו ממש (שני ממש)
לכן נוסף ציפי אחר וחסיון של ממש הקטן שלו

משפט [KHACHIYAN, 79] יש אלגוריתם פולינומילי לפתרון LP

בפולינומילי אלגוריתם Ellipsoid

הערה במציאת ממשים לרוב האם Simplex הוא ממש ממש
לרוב אחר לא פולינומילי, במקרה השני ממש ממש.

קירוב VC בעזרת LP

(כמו את דג"ח VC בקירוב בעזרת אנס'מליה (קבוצה LP-)

$$\text{minimize } x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\forall i: x_i \in \{0, 1\}$$

$$\forall \{i, j\} \in E: x_i + x_j \geq 1$$

G: x מילד קונקור. $x_i = 1$ x שומר שבתוך x; עקבות אלו. הבנה

הכו עקוב דג"ח VC הדיק, ~~הוא~~ הוא לא מוגדר דג"ח

LP כי למדו לנו לקבוע $\{x_i\}$ (Integer Programming) זה לא

הסיון כי VC NP-אלה ו-LC הוא ק-P ולכן סביר ש

למדו לראות באופן מלא.

כשם האון נחלק גורם לנאיות (LP) אחר את יוצא למדו

$$\text{minimize } x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\forall i: 0 \leq x_i \leq 1$$

$$\forall \{i, j\} \in E: x_i + x_j \geq 1$$

אם ה-OPT למדו הקון ק"ח א בעזרת Integer Programming

אם ה-OPT* למדו הקון ק"ח א ~~בעזרת~~ דג"ח LP להבדיל
כחל.

מכיון שה-LP הוא עקבות (הוא אלו) א בעזרת LP, נוס

$$\text{OPT}^* \leq \text{OPT}$$

אם נסב למדו הן - הע"א. נסב עקבות הבע"א אלו

$$\text{אם } G \text{ הבע"א שםכך (ד"ח LP)} \leq 0.5$$

נראה: א. אם הילד בול. ✓

ב. בול חוקי: אם קם במל, $\{i, j\}$, יוצא כי $x_i + x_j \geq 1$.

אם מהכרח, $x_i \geq \frac{1}{2}$ או $x_j \geq \frac{1}{2}$ ולכן סביר

אם אדם בקבוצה הקונקור שבתוך.

ד. יחס הקירוב ≥ 2 :

$$|M| \leq 2 \sum_{i=1}^n x_i \leq 2 \sum_{i=1}^n x_i^{OPT^*} \leq 2 OPT$$

↑ קצוץ הקירובים
למחירן

ננסה לראות שהעיון למטה עובד:

$$|M| \leq 2 \sum x_i$$

לכיוון שמחירן ~~אז~~ קונקורנץ שסכמו לפחות חצי, קודם כל $\frac{1}{2} \leq \sum_{i \in M} x_i$ באופן ברור. נעביר את 2 אלף, וננסה את M אלף הקונקורנץ לזרז ימין.

$$2 \sum x_i = 2 \cdot OPT^*$$

ע"כ השערה.

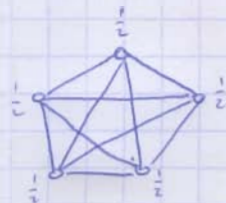
$OPT^* \leq OPT$ מכיוון שהעבודה היא רילקסציה (כל מחירן של IP הוא אפיון של LP).

אכן הוכחנו ~~אז~~ שיש הקירוב הוא לכל היותר 2 .

נראה שחסר דבר חסר חסר הדיוק, כלומר ק"מ"ם שרובם בהם יחס הקירוב הוא בדיוק 2 .

דוגמא:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} \vdots \\ \circ \text{---} \circ \\ \vdots \\ \circ \text{---} \circ \\ \vdots \\ \circ \text{---} \circ \\ \vdots \\ \circ \text{---} \circ \\ \vdots \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} OPT = m \\ OPT^* = m \\ ALG = 2m \end{array}$$



לדוגמה: קצוץ קטן n

$$\begin{array}{l} OPT = n-1 \\ OPT^* = \frac{n}{2} \\ ALG = n \end{array}$$

(בעקרה בו $n=5$ זה יחס הקירוב 2 ולמעשה מקרה ספציפי של הדוגמא הקודמת)

הערה: ידוע שקרה ביחס 1.36 זה NP-קשה

אם ידוע שקרה ביחס 2 זה קשה, אבל לא ידוע

זה NP-קשה.