9.6.09

סיבוכיות - תרגול 13

היום נעבור על ההוכחה של קושי בקירוב המספר הכרומטי (היינו
גם כשיש צביעת גרף מינימלית ואין χ), ואז נספיק* גם נראה דוגמא/
לדה-רנדומיזציה (derandomization) של אלגוריתם רנדומי.

* אני מתערב על עשר שקל שלא נספיק

קושי בקירוב המספר הכרומטי

<u>תזכורת:</u> ראינו כי $kCSG_v[\delta,1]$ היא NP-קשה לכל $\delta>0$
(עבור איזה k מתאים) ולכן קיבלנו שבעיית $gap\text{-}IS[\frac{\delta}{k},\frac{1}{k}]$ היא
NP-קשה, ולמעשה קשה לקרב את IS בכל פקטור קבוע.

נרצה להשתמש ברדוקציה הזו וההיגיון הזה על מנת להוכיח שגם χ
NP-קשה. עם זאת χ היא בעיה יותר מורכבת ולכן נצטרך להיות יותר
מתוחכמים.

<u>טענה:</u> יהי G גרף פשוט, $\alpha(G)$ גודל הקבוצה הב"ת המקסימלית
$\chi(G)$ מספר הצביעה של G (המספר הכרומטי), n מספר הצמתים.
אז $\chi(G)\cdot\alpha(G)\geq n$. נכונות הטענה ברורה: צביעה היא חלוקה
של הגרף לקבוצות ב"ת. אם ניקח את הקבוצות וב"ת שלנו (שגודלן ביחד שווה ל-n),
ונחליף את כולן לגודל הקבוצה הב"ת הגדולה ביותר בגרף, בהכרח סכום גודלן
יהיה לפחות n. נשתמש בטענה זו במהלך הוכחתנו לכך ש-χ
היא NP-קשה.

נגדיר את CSG_Δ להיות המקרה הפרטי של CSG_v בו לכל
קשת $e=(u,v)$ קיימת $S_e \in \mathbb{Z}_q$ (קבוצת צבעים מתוך $\{0,1,\dots,q-1\}$)
כך ש-(x,y) צביעה חוקית ל-(u,v) אמ"מ $x-y \pmod q \in S_e$.

נראה תחילה כי אם בעיית $kCSG_\Delta[\delta,1]$ היא NP-קשה לכל $\delta>0$
(ו-k מתאים) אז קשה לקרב את המספר הכרומטי. מאוחר יותר
נראה כי הנחה זו באמת נכונה ובכך נסיים את ההוכחה.

ניזכר ברדוקציה שהשתמשנו בה להוכחת הקושי של IS: בהינתן גרף כלשהו, הפכנו כל קודקוד לקליקה בגודל k, וחיברנו שני קודקודים חדשים רק אם צביעה שלהם תביא לסתירה (חיברנו את (u,i) ו- (v,j) רק אם הקשת (u,v) אוסרת על הצביעה (i,j)).

נראה כי אותה רדוקציה בדיוק אשר מקיימת $gap\text{-}CSG_\Delta[\delta,1] \leq_L gap\text{-}IS[\frac{\delta}{k},\frac{1}{k}]$ היא גם רדוקציה בין CSG_Δ ל- χ. מכך נראה שגם בעית CSG_Δ היא NP-קשה, אז קשה לקרב את המספר הכרומטי בכל מקדם קבוע. נוכיח את נכונות הרדוקציית gap לשני כיווני זה.

כאשר גרף האילוצים הוא מהצורה המיוחדת שתיארנו (CSG_Δ):
אם מראש יכולנו לצבוע את כל צמתי הגרף כך שכל הקשתות יסתפקו אז קיימת לנו בגרף הקליקות קבוצה ב"ת S_0 עם נציג מכל קלסטר (קליקה). (עד כה תיארנו גם שהוכחנו נכונות עבור IS).

נשים לב שאם מוסיפים i לצביעה של כל הצמתים בגרף האילוצים המקורי, מקבלים צביעה חוקית שמגדירה קבוצה ב"ת חדשה S_i עם נציג מכל קלסטר. כמו כן, $S_i \cap S_j = \emptyset$. מקבלים ש- $S_1,\dots,S_k$ הן קבוצות ב"ת שמכסות את כל גרף הקלסטרים. לכן מספר הצביעה של הגרף שקיבלנו הוא לכל היותר k.

אם בגרף המקורי לא יכולנו לצבוע בו נכונה יותר מ- δn צמתים אז כל קבוצה ב"ת בגרף הקלסטרים היא מגודל לכל היותר δn.
היות ו- $\alpha(G)\chi(G) \geq |V(G)|$ לכל גרף G, מקבלים שמספר הצביעה הוא לפחות $\frac{kn}{\delta n} = \frac{k}{\delta}$.
למעשה, לא אמרנו מפורש בדיוק בין אילו בעיות gap אנחנו עושים רדוקציה, אך ניתן להסיק זאת מתוך ההוכחה עצמה: $gap\text{-}kCSG_\Delta[\delta,1] \leq_L gap\text{-}\chi[k,\frac{k}{\delta}]$

מכיוון שהרדוקציה נכונה עבור כל δ, קיבלנו שקשה לקרב את המספר הכרומטי עד δ קבוע.

<u>הערה:</u> נזכיר בפעם האחרונה מפני בלבולים בענייני בעית מינימום ומקסימום. עשינו עכשיו (לראשונה) רדוקציה מבעית מקסימום לבעית מינימום. אין בעיה עם זה. באמת כאשר הצביעה החוקית <u>גדולה יותר</u>, מספר הצבעים הדרושים בגרף הקליקות <u>קטן יותר</u>, כהיסק.

לאחר שסיימנו את הרדוקציה הנ"ל, נותר רק להוכיח ש-$gap\text{-}kCSG_\Delta[\delta,1]$ היא קשה NP-קשה לכל δ (עבור k מסוים). נעשה זאת באמצעות הרדוקציה:

$$gap\text{-}kCSG_V[\delta,1] \le_p gap\text{-}(nk)^5 CSG_\Delta[\delta,1]$$

(להזכיר. הניכרון שכינו כ"ז - הוכחנו בעבר ש-$gap\text{-}kCSG_V[\delta,1]$ קשה לכל δ באמצעות משפט ה-PCP ורדוקציית האמפליפיקציה אלון).

נשתמש תחילה בטענת עזר:

<u>טענה:</u> תהי $|S|=k$. קיימת העתקה $\Psi: S\to[q]$ (בשיעור קראנו לה T), $q=\Theta(k^5)$ כך שלכל $a,b,c,d,e,f\in S$:

$$\Psi(a)+\Psi(b)+\Psi(c)=\Psi(d)+\Psi(e)+\Psi(f) \mod q$$

$$\Downarrow$$

$$\{a,b,c\}=\{d,e,f\}$$

כלומר, אם לשתי שלשות יש את אותו סכום, הן למעשה אותה שלשה (אולי בשינוי סדר). ראוי לציין שניתן גם לחשב את Ψ בזמן פולי' ב-k.

את ההוכחה לטענה ראינו בשיעור 12, ולא נחזור עליה כאן. רק נזכיר שעשינו זאת באופן ישיר וחמדני, בו כל פעם ניתן לאיבר הבא את המספר הקטן ביותר שלא הורס את התכונה שדרשנו מ-Ψ.

כעת נראה את הרדוקציה $gap\text{-}kCSG_v[\delta,1] \le_p gap\text{-}(nk)^5CSG_\Delta[\delta,1]$,

<u>סקיצת תיאור הרדוקציה</u>

כל צומת בגרף יועתק לצומת בגרף החדש G' $(V'=V)$. המטרה תהיה להגדיר צבעים בגרף החדש כך שלמרות שכל האילוצים שלנו יהיו מהצורה שתיארנו (CSG_Δ), עדיין מכל צביעה טובה של G' נוכל לשחזר צביעה טובה של G.

כל צביעה טובה (חוקית) של קודקודי קשת (u,v) תעבור להפרש טוב $(\psi(x)-\psi(y))$ ב-G'. לכן, אם בחרנו שלושה קודקודים בצבעים α,β,γ אז הצביעה מתאימה לצביעות מתאימות בגרף המקורי:

$$\alpha-\beta = \psi(u,x)-\psi(v,y)$$
$$\beta-\alpha = \psi(v,y')-\psi(w,z)$$
$$\gamma-\alpha = \psi(w,z')-\psi(u,x')$$

אם נחסר את שלושת המשוואות, נקבל מצד שמאל 0 ומצד ימין חיסור בין שתי שלישיות. אבל, סכום שתי השלישיות האלה זהה, ולכן לפי בניית ψ הן אותה k-יה. מכך נובע ש- $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, ולכן הצביעה קונסיסטנטית.

מפאת חוסר זמן* אפילו לא כל כך סיימנו את הרדוקציה האחרונה (הוכחנו רק קונסיסטנטיות לוקלית וכו') ולכן עוד ישלח מייל עם כל הפרטים החסרים.

* אמרתי לכם שלא נספיק, עכשיו אתם חייבים לי עשר שקל. אגב אני אומר לכם על הכסף אם תעלו לאתר ארצי, תרדו לסוף העמוד ותוסיפו תגובה שכתוב בה שהסיכומים בסיבוכיות הם הסיכומים הכי טובים שראיתם אי פעם, וספציפית יותר טובים מהסיכומים בלוגיקה ומד"ר.