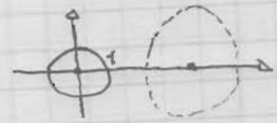
5/11/09

מרוכבות - שיעור 6

קשירות (ב- $X=\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$)

הגדרה: קבוצה $A\subseteq X$ נקראת קשירה אם אי אפשר לכתוב את A כאיחוד של שתי קבוצות פתוחות ב-A (יחסית), זרות, לא ריקות. ($A=U\cup V$, $U\cap V=\emptyset$, U ו-V פתוחות ב-A $\Rightarrow$ $V=\emptyset$ או $U=\emptyset$)

הגדרה שקולה: A קשירה $\Leftrightarrow$ אין ל-A תת קבוצה לא ריקה ממש שהיא גם פתוחה וגם סגורה ב-A.

דוגמה: A = 

$\Leftarrow$ $A=\underbrace{\{z\in\mathbb{C}: |z|\le 1\}}_{U}\cup\underbrace{\{z\in\mathbb{C}: |z-6|<2\}}_{V}$

U פתוחה ב-A כי $U=A\cap B$ כאשר $B=\{z\in\mathbb{C}: |z|<3\}$ (פתוחה ב-X)

V פתוחה ב-A כי $V=A\cap V$ ו-V פתוחה ב-X.

משפט:

תת קבוצה של $\mathbb{R}$ היא קשירה $\Leftrightarrow$ היא קטע (כולל אינסופיים: (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,\infty)$, (a,∞) וכו')

הוכחה:

($\Rightarrow$) יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע. נניח כי (בשלילה) $I=A\cup B$ איחוד זר של שתי קבוצות פתוחות ב-I ולא ריקות. נבחר $a\in A$, $b\in B$. כיוון ש-I הוא קטע, $[a,b]\subseteq I$. נחצה קטע זה: $c=\frac{a+b}{2}$, אז $c\in I$ ולכן $c\in A$ או $c\in B$. אם $c\in A$, נסמן בקטע $[a_1,b_1]=[c,b]$. ואם $c\in B$, נסמן בקטע $[a_1,b_1]=[a,c]$.

נחזור על התהליך עבור $[a_1,b_1]$, נמצא אחד החצאים קטע $[a_2,b_2]$ כך ש- $a_2\in A$, $b_2\in B$, וכן הלאה. נקבל סדרת קטעים $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $a_n\in A$, $b_n\in B$, כך ש- $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]\subseteq\dots\subseteq[a,b]\subseteq I$. וכן: $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)$.

לכן, קיים r כך ש- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות לאותו גבול r. כיוון ש-A סגורה ב-I ו- $\{a_n\}\subset A$, אז $r\in A$, ובאותו אופן $r\in B$, ולכן $r\in A\cap B=\emptyset$ סתירה!

($\Leftarrow$) נניח $E\subseteq\mathbb{R}$ קשירה. נסמן $b=\sup E\le\infty$, $-\infty\le a=\inf E$.

אם $a=b$ אז $E=\{a\}$ (קטע מנוון). נניח כי $a<b$: נראה ש- $(a,b)\subset E$.

נניח כי $t\in\mathbb{R}$, $a<t<b$. נניח בשלילה כי $t\notin E$. נגדיר $E=E_1\cup E_2$.

$E_1=\{x\in E: x<t\}$, $E_2=\{x\in E: x>t\}$, ואלו איחוד זר.

כיוון ש- $(-\infty,t)$ פתוחה ב-$\mathbb{R}$, מתקיים כי E_1 פתוחה ב-E: $E_1=E\cap(-\infty,t)$, ובאותו אופן $E_2=E\cap(t,\infty)$ פתוחה ב-E. כיוון ש-E קשירה, $E_1=\emptyset$ או $E_2=\emptyset$.

אם $E_1=\emptyset$, אז נקבל סתירה לכך ש-a הוא חסם תחתון של E.

26

אבל $E_2=\phi$ אז נקבל סתירה לכך ש-d הוא חסם של E. לכן לכל $d<t<a$: $t\in E$. ☒

<u>מסקנה:</u>

ניתן ישר l במישור. אז כל הקבוצות <u>הקשירות</u> של l הן בדיוק כל הקטעים <u>המוכלים</u> ב-l

<u>למה:</u>

תהי קב' של קבוצות <u>קשירות</u> $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$. ונניח כי: $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\neq\phi$.

אז: $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ <u>קשירה</u>.

<u>הוכחה:</u>

נניח כי: $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = U\cup V$ איחוד זר של שתי קבוצות פתוחות ב- $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$. (כלומר איננה קשירה) [אז ש-$U\neq\phi$, אז $V\neq\phi$]

אז $A_\alpha = A_\alpha\cap(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha) = A_\alpha\cap(U\cup V) = (A_\alpha\cap U)\cup(A_\alpha\cap V)$, כלומר כל איחוד זר של שתי קב' פתוחות ב-A_α. וכיוון ש-A_α קשירה אז $A_\alpha\cap U=\phi$ או $A_\alpha\cap V=\phi$.

כלומר $A_\alpha\subseteq U$ או $A_\alpha\subseteq V$. נקבע $\alpha_0\in I$. נניח בה"כ ש- $A_{\alpha_0}\subseteq U$.

נראה כי לכל α, $A_\alpha\subseteq U$. בשלילה, אם יש $\alpha_0\neq\alpha$ כך ש $A_\alpha\subseteq V$ נקבל

ש- $A_\alpha\cap A_{\alpha_0}\subseteq U\cap V=\phi$, אבל $A_\alpha\cap A_{\alpha_0}\supseteq\bigcap_{\beta\in I}A_\beta\neq\phi$ סתירה!

ולכן $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha=U$ ו- $V=\phi$.

<u>מסקנה:</u>

תהיינה קבוצות <u>קשירות</u> $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$. נניח שיש $\alpha_0\in I$ כך ש- $A_\alpha\cap A_{\alpha_0}\neq\phi$ לכל $\alpha\in I$.

אז $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ <u>קשירה</u>.

<u>תרגיל:</u> תהי קבוצת ישרים במישור, המכילה שני ישרים נחתכים. (נסמן $\mathcal{L}$) אז איחוד הישרים קשיר:

נניח כי A_1,A_2 שני ישרים נחתכים מהקב'. אז כל ישר בקב' או שהוא חותך את A_1 או שהוא חותך את A_2. נגדיר $\Sigma_i=\left\{\begin{array}{l}\text{כל הישרים ב-}\mathcal{L}\\ \text{החותכים את } A_i\end{array}\right\}$, $i=1,2$. אז $\bigcup_{A_\alpha\in\Sigma_i} A_\alpha$ לכל Σ_i קשירה (לפי המסקנה)

ולכן גם $(\bigcup_{A_\alpha\in\Sigma_1} A_\alpha)\cup(\bigcup_{A_\alpha\in\Sigma_2} A_\alpha)$ קשירה (כאיחוד של שתי קב' קשירות $A_1\cap A_2\in\Sigma_1\cap\Sigma_2\neq\phi$)