מרוכבות - שיעור 5

<u>המשך</u>: יהי F קב' סגורה במובן החדש: כל סדרה מתכנסת $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq F$,
אז גבול הסדרה שייך ל-F. נראה כי F סגורה. (כאשר $X=\mathbb{C}, \mathbb{C}\cup\{\infty\}$)
נראה כי $U=X\setminus F$ פתוחה. נראה כי לכל $z\in U$ יש סביבה המוכלת ב-U.
בשלילה, נניח כי יש $a\in U$ כך שבכל סביבה V של a יש נקודות מ-F.
נבחר סדרת סביבות $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ של a, "מתכנסות ל-a", ונבחר $z_n\in V_n\cap F$,
ואז $z_n\xrightarrow{n\to\infty}a$, ולכן $a\in F$ - סתירה. אם $a\in\mathbb{C}$ ניקח $V_n=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|<\frac{1}{n}\}$
ואז לכל $z_n\in V_n\cap F$ מתקיים כי $z_n\xrightarrow{n\to\infty}a$. אם $a=\infty$, ניקח את
$V_n=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>n\}\cup\{\infty\}$, ואז לכל $z_n\in V_n\cap F$ מתקיים כי $z_n\to\infty$.

<u>למה</u>: (BW)

כל סדרה ב-$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ יש תת-סדרה מתכנסת.

<u>הוכחה</u>:

יהי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. אם אינסוף ערכים של n: $z_n=\infty$,
אז $\{z_n\mid z_n=\infty\}$ היא תת-סדרה קבועה ולכן מתכנסת. נניח אם כן
שיש מס' סופי של ערכים $z_n=\infty$, כלומר קיים N_0 גדול כך ש:
$n\geq N_0\Rightarrow z_n\in\mathbb{C}$. אם $\{z_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ חסומה, אז לפי ב"ו יש לה תת סדרה מתכנסת
שב-$\mathbb{C}$. אם $\{z_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ אינה חסומה, אז $\{|z_n|\}_{n=N_0}^{\infty}$ אינה חסומה מלעיל,
ולכן יש לה תת-סדרה שואפת לאינסוף: $|z_{n_k}|\xrightarrow{k\to\infty}\infty$, כלומר $z_{n_k}\to\infty$. ∎

<u>הגדרה</u>: (פנים של קבוצה)

תהיה קב' $X\supseteq T$. נאמר כי נק' $z\in X$ היא נק' פנים של T, אם קיימת
סביבה של z המוכלת ב-T.

<u>סימון</u>: $\mathring{T}$ - קב' הפנים של T.

<u>תכונות</u>: • $\mathring{T}\subseteq T$

• $\mathring{T}$ היא קב' פתוחה. כי אם $z\in\mathring{T}$ אז יש סביבה U
כך ש- $z\in U\subseteq T$. לכן מתקיים כי לכל $x\in U\subseteq T$: $x\in\mathring{T}$,
ולכן $z\in U\subseteq\mathring{T}$.

• זוהי הקב' הפתוחה הגדולה ביותר ב-T: $V\subseteq\mathring{T}$ $\forall V\subseteq T$ פתוחה.

• ייתכן ש- $\mathring{T}=\Phi$. למשל $T=$ ישר, $T=$ [illegible]

<u>הגדרה:</u> (סגור של קבוצה)

נתונה קב' $T\subseteq X$. נאמר כי z נקודת סגור של T, אם בכל סביבה של z יש נק' מ-T.

<u>סימון:</u> $\bar{T}$ - קב' נקודות הסגור של T.

<u>תכונות:</u>

- $T\subseteq\bar{T}$.
- $\bar{T}$ קב' סגורה: כי $X\setminus\bar{T}$ פתוחה: נניח כי $z\in X\setminus\bar{T}$, כלומר $z\notin\bar{T}$, אז לפי ההגדרה קיימת סביבה V של z כך שב-V אין אף נק' מ-T. מכאן שאין גם אף נק' מ-$\bar{T}$ (אחרת אם יש $x\in V\cap\bar{T}$ אז בגלל ש- $x\in\bar{T}$ ו-V סביבה של x נקבל כי V מכילה נק' מ-T, כלומר $\phi\neq T\cap V$ בסתירה). לכן, לכל $z\in X\setminus\bar{T}$ יש סביבה V כך ש-$z\in V\subseteq X\setminus\bar{T}$, ולכן $X\setminus\bar{T}$ פתוחה.
- $\bar{T}$ הקב' הסגורה הקטנה ביותר המכילה את T: $\bar{T}\subseteq V$ $\forall_{\substack{V\supseteq T\\ \text{סגורה}}}$.

  הוכחה: כי אם F סגורה ו- $T\subseteq F$, צ.ל: $\bar{T}\subseteq F$.

  נניח כי $z\in\bar{T}$. אם, בשלילה, $z\in\underbrace{X\setminus T}_{\text{פתוחה}}$, $X\setminus F$ היא סביבה של z ולכן מכילה איברים מ-T - סתירה (כי $T\subseteq F$).

<u>למה:</u>

נתונה קב' $T\subseteq X$. אז $z\in\bar{T}$ $\Longleftrightarrow$ יש סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq T$ המתכנסת ל-z.

<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) נניח כי $z\in\bar{T}$. ניקח $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת סביבות של z המתכנסות ל-z.
כיוון ש-$z\in\bar{T}$, יש $z_n\in V_n\cap T$, ולכן $z_n\xrightarrow{n\to\infty}z$. הראינו כי z הוא גבול של סדרה מתכנסת מתוך T.

($\Rightarrow$) נניח כי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq T$ מתכנסת ל- $z\in X$. נראה כי $z\in\bar{T}$.
תהי U סביבה של z. יש N טבעי כך ש- $n\geq N \Leftarrow z_n\in U$.
ולכן U מכילה איברים מ-T.

<u>הגדרה:</u> (שפה של קבוצה)

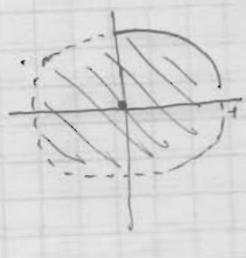
נתונה קב' $T\subseteq X$. השפה של T היא: $\partial T=\bar{T}\cap\overline{(X\setminus T)}$
$=\bar{T}\setminus T^{c}$

<u>טענה:</u>

$z\in\partial T$ $\Longleftrightarrow$ בכל סביבה של z יש איברים מ-T ויש איברים מ-$X\setminus T$.

ואפיון בעזרת סדרות: $z\in\partial T \iff$ יש סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq T$ וסדרה $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X\setminus T$ כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n=z$.

דוגמא:



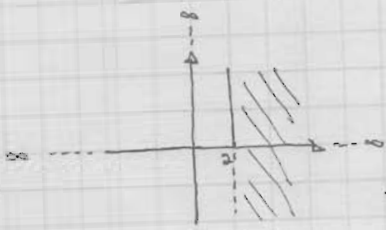
$$T=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}\cup\{\cos\theta+i\sin\theta: 0\le\theta\le\tfrac{\pi}{2}\}$$

אז $\mathring{T}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$

$$\overline{T}=\{z\in\mathbb{C}: |z|\le 1\}$$

$$\partial T=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$$

דוגמא:



$$T=\{z\in\mathbb{C}: Re(z)>2\}\cup\{z\in\mathbb{C}: \begin{matrix}Re(z)=2\\ Im(z)>0\end{matrix}\}\cup\{\infty\}$$

אז $\mathring{T}=\{z\in\mathbb{C}: Re(z)>2\}$, $\overline{T}=\{z\in\mathbb{C}\ Re(z)\ge 2\}\cup\{\infty\}$

$$\partial T=\{z\in\mathbb{C}: Re(z)=2\}\cup\{\infty\}$$

<u>הגדרה</u>: (נקודת הצטברות)

נתונה קבוצה $T\subseteq X$. נק' $z\in X$ נקראת נק' הצטברות של T אם בכל סביבה של z יש נק' מ-T, אשר <u>שונה</u> מ-z.

<u>הערה</u>: z נק' הצטברות של T $\iff$ יש סדרה אינסופית של איברי T המתכנסת ל-z.

<u>הגדרה</u>: (תת-קבוצה פתוחה/סגורה ב-A)

נתונה קבוצה $A\subseteq X$. נאמר שתת-קבוצה $B\subseteq A$ היא <u>פתוחה ב-A</u> אם יש קב' פתוחה $V\subseteq X$ כך ש- $B=A\cap V$.

באותו אופן נאמר כי $B\subseteq A$ <u>סגורה ב-A</u> אם יש קב' סגורה $F\subseteq X$ כך ש- $B=A\cap F$.

<u>דוגמא</u>:

$A=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$, $B=\{z\in\mathbb{R}: -1<z<1\}$, אז B סגורה ב-A.

כי $B=\mathbb{R}\cap A$ ו- $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ סגורה.

<u>למה</u>:

נתונה קב' $A\subseteq X$: **(1)** $B\subseteq A$ פתוחה ב-A $\iff$ המשלים של B ביחס ל-A סגור ב-A.

(2) איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות ב-A הוא קב' פתוחה ב-A.

(3) חיתוך סופי של קבוצות פתוחות ב-A הוא קב' פתוחה ב-A.

(4) חיתוך כלשהו של קב' סגורות ב-A הוא קב' סגורה ב-A.

(5) איחוד סופי של קב' סגורות ב-A הוא סגור ב-A.

(6) נניח כי $C\subseteq B\subseteq A$ ו-B פתוחה (סגורה) ב-A, ו-C פתוחה (סגורה) ב-B

אז C פתוחה (סגורה) ב-A.

הוכחה:

(1) נניח כי B פתוחה ב-A. אז $B=A\cap V$ כאשר $V\subseteq X$ פתוחה.

$$A\setminus B=A\setminus(A\cap V)=A\cap(X\setminus(A\cap V))=A\cap((X\setminus A)\cup(X\setminus V))$$

$$=A\cap(\underbrace{X\setminus V}_{\text{סגורה}})=\text{סגורה ב-}A$$

הכיוון ההפוך - דומה.

(2) נניח כי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ היא קב' קבוצות פתוחות ב-A. לכן אפשר לכתוב $A_\alpha=A\cap V_\alpha$ כאשר $V_\alpha\subseteq X$ פתוחה. אז:

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap V_\alpha)=A\cap(\underbrace{\bigcup_{\alpha\in I}V_\alpha}_{\text{פתוחה ב-}X})=\text{קב' פתוחה ב-}A$$

(6) נניח כי B פתוחה ב-A, אז $B=A\cap V$ כש- $V\subseteq X$ פתוחה.

נניח כי C פתוחה ב-B, אז $C=B\cap U$ כש- $U\subseteq X$ פתוחה.

ולכן:

$$C=B\cap U=(A\cap V)\cap U=A\cap(\underbrace{V\cap U}_{\text{פתוחה}})=\text{פתוחה ב-}A$$

(וכנ"ל עבור סגורה)

מסקנה: ((מ-(6))

נתונות קבוצות $A\supseteq B\supseteq C$, אז C פתוחה ב-B

$\Updownarrow$

יש קבוצה פתוחה ב-A, L, כך ש- $C=B\cap L$.

למה:

$B\subseteq A$ פתוחה ב-A $\iff$ לכל $z\in B$ יש קב' פתוחה ב-A, U,

כך ש- $z\in U\subseteq A$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) אם B פתוחה ב-A, נכתוב $B=A\cap V$ כש- $V\subseteq X$ פתוחה.

נניח כי $z\in B$. נובע ש- $z\in V$ ו-V פתוחה, יש סביבה של z, U,

כך ש- $U\subseteq V$, ולכן $z\in \underbrace{A\cap U}_{\text{פתוחה ב-}A}\subseteq A\cap V=B$.

($\Rightarrow$) לכל $z\in B$, נבחר קב' פתוחה ב-A, U_z, כך ש- $U_z\subseteq B$.

ולכן נקבל כי: $B=\bigcup_{z\in B}U_z=$ קב' פתוחות ב-A באיחוד של כולם. ∎

דוגמאות:

$A=\mathbb{R}$, $B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ב-$\mathbb{R}$ $\iff$ לכל $x\in B$ יש קטע פתוח (a,b) כך ש- $x\in(a,b)\subseteq B$.

למה:

$B\subseteq A$ היא סגורה ב-A $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq B$ המתכנסת ל-$z\in A$, מתקיים $z\in B$

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח כי B סגורה ב-A. נתון $B=A\cap F$ כאשר $F\subseteq X$ סגורה.

נניח כי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq B$ מתכנסת: $z_n\xrightarrow{n\to\infty}a\in A$. כיוון ש-$\{z_n\}\subseteq F$ ומתכנסת ל-a, אז $a\in F$ (כי F סגורה) ולכן $a\in A\cap F=B$. ∎

($\Rightarrow$) נניח כי ל-B יש את התכונה הנ"ל. נראה כי $A\setminus B$ פתוחה ב-A.

בשלילה, יש $z\in A\setminus B$ כך שכל קבוצה פתוחה ב-A, שמוכלת ב-U, המכילה את z, יש נקודות מ-B. כלומר, לכל סביבה של z, V (ב-X): $V\cap A$ מכילה נקודות מ-B. ניקח סדרת סביבות של z, $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסות ל-z. נבחר $z_n\in V_n\cap B$ לכל n. אז $z_n\xrightarrow{n\to\infty}z$, $B\ni z_n$,

ומהתכונה (בשלילה): $z\in B$, סתירה. ∎