מרוכבות - שיעור 22

21/12/09

המשך הוכחה:

$f(z)$ - אנליטית על קבוצה פתוחה D, $z_0\in D$, $f(z_0)=a_0$. נניח כי z_0 הוא אפס מסדר n. נקח $\varepsilon_0>0$: z_0 הוא האפס היחיד של $f(z)-a_0$ בתחום $|z-z_0|<\varepsilon_0$.

* בנוסף: z_0 הוא גם האפס היחיד של $f'(z)$ בתחום. * $n=1$: $f'(z)\neq 0$ לכל z בתחום הנ"ל.

נקח $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ ונגדיר $\gamma:|z-z_0|=\varepsilon$. Γ = תמונת המסילה γ תחת f. $a_0\notin\Gamma$.

יש $\delta>0$ כך ש- $D_\delta(a_0)\subseteq\mathbb{C}\setminus\Gamma$. $D_\delta(a_0)$ קשיר $\Leftarrow$ $D_\delta(a_0)$ בתוך מרכיב קשירות יחיד של $\mathbb{C}\setminus\Gamma$.

לכן, לכל $a\in D_\delta(a_0)$: $n(\Gamma,a)=n(\Gamma,a_0)$. $n(\Gamma,a)=\sum_{j=1} n(\gamma,z_j(a))$!, כש- z_j עובר על כל ההתאפסויות, כולל ריבוי, של $f(z)=a$ ב-D. לכן $n(\Gamma,a)$ = מס' ההתאפסויות (כולל ריבוי) של $f(z)-a$ אשר נמצאים ב- $D_\varepsilon(z_0)$. . לפי הגדרת ε_0: $n(\Gamma,a_0)=n$, ולכן,

לכל $a\in D_\delta(a_0)$: $n(\Gamma,a)=n$, ולכן יש n התאפסויות (כולל ריבוי): $z_1,\dots,z_n$, למשוואה $f(z)=a$ אשר נמצאים ב- $D_\varepsilon(z_0)$. כאשר $a\neq a_0$, z_j מריבוי 1 (אחרת, נקבל כי $f'(z_j)=0$ ואז נקבל $z_j=z_0$ ואז $a=a_0$ בסתירה). לכן $z_1,\dots,z_n$ שונים זה מזה. ☒

מסקנה: מהגרסה המקומית קיבלנו: לכל a_0 בתמונה, f, יש עיגול פתוח $D_\delta(a_0)$ כך ש- $D_\delta(a_0)$ מוכל כולו בתמונה f. כלומר, תמונת f פתוחה.

משפט ההעתקה הפתוחה:

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית, לא קבועה, על תחום U, אז f מעבירה קבוצה פתוחה לקבוצה פתוחה.

הוכחה:

תהי $V\subseteq U$ תת-קבוצה פתוחה. אז $V=\bigcup_\alpha D_\alpha$ כש- D_α עיגולים פתוחים.

לכן $f(V)=\bigcup_\alpha f(D_\alpha)$. כמו כן, לכל α, $f|_{D_\alpha}$ אינה קבועה (כי אחרת נקבל כי f קבועה על כל U, לפי משפט היחידות [הפונקציה הנ"ל]), ומהמסקנה, $f(D_\alpha)$ פתוחה לכל α.

ולכן $f(V)$ פתוחה. ☒

עקרון המקסימום:

תהי $f(z)$ פונ' אנליטית, לא קבועה, בתחום U, אז $|f(z)|$ אינו מקבל מקס' ב-U.

הוכחה:

נסמן $V=Im(f)$. אז $V\subseteq\mathbb{C}$ תחום פתוח, ו- $\{|v|:v\in V\}=\{|f(z)|:z\in U\}$ ולכן אין מקס' כי V פתוח. ☒

משפט:

יהי $f(z)$ פונ' אנליטית, לא קבועה, בתחום U, ויהי $K\subseteq U$ קבוצה סגורה וחסומה.

אז המקסימום של $|f(z)|$ על K מתקבל רק על ∂K.

הוכחה:

נניח בשלילה כי $|f(z)|$ מצומצם ל-K, מקבל מקס' ב-$z_0\in \mathring{K}$. אזי יש סביבה פתוחה D סביב z_0, המוכלת ב-K. כיוון ש-f אינה קבועה על U, גם $f|_D$ אינה קבועה. ולכן $|f(z)|$ מצומצם ל-K אינו מקבל מקסימום (לפי עקרון המקס') - סתירה.

לכן $|f(z)|$, מצומצם ל-K, מקבל מקסימום ב-∂K. $\blacksquare$

משפט ויירשטראס

יהי $\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ סדרת פונקציות אנליטיות בתחום U. נניח כי לכל $z\in U$ מתקיים: $f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z)$. נניח כי לכל תת-קבוצה סגורה וחסומה $K\subseteq U$, $\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת במ"ש ל-$f(z)$ על K. אז $f(z)$ אנליטית ב-U, וכן $f'(z)=\lim_{n\to\infty} f_n'(z)$ $(z\in U)$, ו-$\{f_n'(z)\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת ל-$f'(z)$ במ"ש על כל קבוצה סגורה וחסומה $K\subseteq U$.

הוכחה:

יהי $a\in U$, ויהי סגור כך ש- $\{\zeta \mid |\zeta-a|\le r\}\subseteq U$. מנוסחת קושי, לכל $|z-a|<r$:

$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ לכל $n\ge 1$. $\left\{\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}\right\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת במ"ש על המעגל $|\zeta-a|=r$ לפונק' $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$. אז

$$\max_{|\zeta-a|=r}\left|\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right| = \max_{|\zeta-a|=r}\frac{|f_n(\zeta)-f(\zeta)|}{|\zeta-z|} \le \frac{\max_{|\zeta-a|=r}(|f_n(\zeta)-f(\zeta)|)}{r-|z-a|}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$|\zeta-z|\ge \underbrace{|\zeta-a|}_{r}-|z-a|$

כי המעגל $|\zeta-a|=r$ הוא קב' סגורה וחסומה

לכן נובע כי $\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ ולכן $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$.

ראינו, כמו שכבר, כי אגף ימין מגדיר פונ' אנליטית של z, ולכן $f(z)$ אנליטית בעיגול $|z-a|<r$.

זה נכון לכל $a\in U$, ולכן $f(z)$ אנליטית ב-U. מנוסחת קושי: $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$

וכמו כן $f_n'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$. אך בדיוק כמו קודם, הסדרה $\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$

מתכנסת במ"ש על המעגל $|\zeta-a|=r$ ל- $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}$,

$\Longleftarrow$ $f_n'(z)\xrightarrow[n\to\infty]{}f'(z)$ לכל $z\in U$.

את החלק שהתכנסות זו היא במ"ש על כל קב' סגורה וחסומה (לא הוכחנו)