מרוכבות - הרצאה 11 29/12/08

טורי טיילור

תזכורת: f אנליטית ב- $D=\{|z-z_0|<r\}$, אז קיים לה פיתוח טיילור מסביב (טור חזקות), ושווה $|z-z_0|<r$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

דוגמא: פתחו את $f(z)$ לטור טיילור סביב z_0:

א. $f(z)=\frac{1}{1-z}$, $z_0=2$:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-(z-2)-2}=\frac{-1}{1+(z-2)}$$

הערה: זה נכון רק מקומית,

$$\underset{q=-(z-2)}{=}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(z-2)^n \rightarrow \text{פיתוח טיילור} \qquad \left[|q|<1,\ q\in\mathbb{C},\ \frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right] \text{ טור הנדסי}$$

$|z-2|<1$

כי אם יש פיתוח אחר (בתחום $1<R$) של טורים חזקות מתכנסים ב- $\{|z|<1\}$, ומכך נובע ממשפט היחידות שהם שווים. $\sum_{1} a_n z^n=\sum_{R} b_n z^n$

ב. $f(z)=\frac{e^z}{1-z}$, $z_0=0$:

$$e^z\cdot\frac{1}{1-z}\underset{\text{כי שניהם מתכנסים בהחלט}}{=}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot 1\right)\cdot z^n$$

לפי מכפלת קושי: $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n)=\sum\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)z^n$

הערה: פיתוח של $f(z)\cdot g(z)$:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\cdot\frac{g^{(n-k)}(z_0)}{(n-k)!}\right)(z-z_0)^n}_{M}\underset{\text{מכפלת קושי}}{=}f\cdot g=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f\cdot g)^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}_{M}$$

תרגיל: נתון $f(z)=z\cdot(e^z-1)$. מהו הסדר של האפס $z=0$ של f?

$$z(e^z-1)=z\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)=z^2+\frac{z^3}{2!}+\dots \Longleftarrow$$ סדר האפס 2.

תרגיל: הוכח שאין פונקציה אנליטית ב- $\{|z|<2\}$ המקיימת $f(\frac{1}{n})=\frac{(-1)^n}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

פתרון: (בשלילה)

נגדיר $g(z)=f(z)-z$. אז $g(\frac{1}{2n})=f(\frac{1}{2n})-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ g מתאפסת על סדרה מתכנסת לנקודה בתחום, ולכן $\underset{\text{(משפט היחידות)}}{g\equiv 0}$. $\Leftarrow$ $f(z)=z$

ואז $\frac{1}{2k+1}=f\left(\frac{1}{2k+1}\right)\underset{\text{נתון}}{=}\frac{(-1)}{2k+1}$ סתירה!

תרגיל: נתבונן ב- $\sec(z)=\frac{1}{\cos(z)}$, $|z|<\frac{\pi}{2}$. זו פונקציה זוגית,

אם זוגית:
$f(z)=f(-z)$
לכן $f^{(2k+1)}(0)=0$
$f^{(2k+1)}(z)=(-1)^{2k+1}f^{(2k+1)}(-z)$
$f^{(2k+1)}(0)=-f^{(2k+1)}(0)$

לכן פיתוח סביב 0: $\frac{1}{\cos(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$.

הראה כי $E_{2n}-\binom{2n}{2n-2}E_{2n-2}+\binom{2n}{2n-4}E_{2n-4}-\dots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{2}E_2+\underset{(-1)^nE_0}{(-1)^n}=0$

הוכח כי E_{2n} שלמים לכל n.

פתרון:

$\frac{1}{\cos z}\cdot \cos z = 1$ ולכן $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!}\cdot z^{2n}\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}\right) = 1+0\cdot z+0\cdot z^2+\dots$.

מקדם של z^{2n}, $n\geq 1$: $\sum_{k=0}^{n} \frac{E_{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!} = 0 \quad /\cdot (2n)!$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}(-1)^{n-k} E_{2k} = 0 \quad \to$ נקבל באינדוקציה ש-E_{2n} שלמים לכל n

($E_0=1$, וכל הנוסחה מקיימת את
מקדמים בינומיים)

<u>תרגיל:</u> נניח f אנליטית בתחום D, γ מסילה פשוטה סגורה ב-D.

הוכח: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz =$ סכום האפסים של f המוקפים ע"י γ $=\sum_{j=1}^{N} z_j$

z_j אפסים של f (עם ריבוי)
המוקפים ע"י γ

<u>תזכורת:</u>

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{\substack{z_j:\,f(z_j)=0\\ z_j \text{ מוקפת ע"י } \gamma}} n(\gamma, z_j) \to \text{מס' כולל של אפסים}}$$

<u>פתרון:</u>

ניתן לכתוב $f(z)=\prod_{j=1}^{N}(z-z_j)\cdot \underbrace{g(z)}_{\text{אין אפסים ב-}D}$

z_j - כל האפסים של f ב-D (עם ריבוי)

נשים לב שמתקיים:

$$z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z}{z-z_1}+\dots+\frac{z}{z-z_N}+z\cdot\frac{g'(z)}{g(z)}$$

ולכן

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{N}\int_\gamma\frac{z}{z-z_j}\,dz + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{z\,g'(z)}{g(z)}\,dz}_{=0}$$

$\to$ משפט קושי מכיוון
כי $\frac{g'(z)}{g(z)}\cdot z$ אנליטית ב

ומנוסחת קושי:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{z}{z-z_j}\,dz = \begin{cases}0 & \gamma \text{ לא מקיפה } z_j\\ z_j & \text{אחרת}\end{cases}$$