29/10/09

מרוכבות - שיעור א

<u>הגדרה:</u> (סביבה של נק')

לכל $x\in X$ (כש-$X=\mathbb{C}$ או $X=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$), וקב' פתוחה U ב-X המכילה את x,

נאמר כי U היא <u>סביבה של x</u>.

<u>למה:</u>

קב' $U\subset X$ היא פתוחה ב-X $\Leftrightarrow$ לכל נק' $z\in U$ יש סביבה B כך ש-$z\in B\subset U$

<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) אם U פתוחה, אז לכל $z\in U$ ניקח $B=U$.

($\Rightarrow$) נניח כי $U\subset\mathbb{C}$. תהי $z\in U$. תהי $B\subset U$ קב' פתוחה המכילה את z. (סביבה של z)

לכן יש כדור פתוח B' כך ש-$z\in B'\subset B$. לכן לכל $z\in U$ יש כדור פתוח

B' כך ש-$z\in B'\subset U$, ולפי ההגדרה, U פתוחה ב-$\mathbb{C}$.

נניח כי $U\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ וכי $\infty\in U$. תהי V סביבה של ∞ המוכלת ב-U.

לפי ההגדרה, $F=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus V$ היא קב' סגורה וחסומה (ב-$\mathbb{C}$),

ובפרט $A=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus U\subset F$ חסומה. נותר להוכיח כי המשלים של

סגור ב-$\mathbb{C}$. נראה כי המשלים של A ב-$\mathbb{C}$ פתוח ב-$\mathbb{C}$.

מתקיים כי $A=\mathbb{C}\setminus(U\setminus\{\infty\})$. נראה כי $U\setminus\{\infty\}$ פתוחה ב-$\mathbb{C}$.

תהי $z\in U\setminus\{\infty\}$. לכן יש $V\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ פתוחה המכילה את z ומוכלת ב-U.

אם $\infty\notin V'$, אז V' פתוחה ב-$\mathbb{C}$, ולכן יש כדור פתוח B' כך ש-

$z\in B'\subset V'\subset U\setminus\{\infty\}$. ואם $\infty\in V'$, אז $V'\setminus\{\infty\}$ פתוחה ב-$\mathbb{C}$

(כי $\mathbb{C}\setminus(V'\setminus\{\infty\})=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus V'$, וזאת קב' סגורה (וחסומה) מהנתון)

כיוון ש-$z\neq\infty$, אז $z\in V'\setminus\{\infty\}$, ומכאן נובע שיש כדור פתוח B' כך ש-

$z\in B'\subset V'\setminus\{\infty\}\subset U\setminus\{\infty\}$.

מצאנו כי לכל $z\in U\setminus\{\infty\}$, יש כדור פתוח B' כך ש-$z\in B'\subset U\setminus\{\infty\}$.

ולפי ההגדרה, $U\setminus\{\infty\}$ פתוחה, כמו שרצינו. ∎

למה:

$X=\mathbb{C},\ \mathbb{C}\cup\{\infty\}$. אז: (א) איחוד כלשהו של קב' פתוחות הוא קב' פתוחה.

(ב) חיתוך כלשהו של קב' סגורות הוא קב' סגורה.

(ג) חיתוך של מס' סופי של קב' פתוחות הוא קב' פתוחה.

(ד) איחוד של מס' סופי של קב' סגורות הוא קב' סגורה.

הוכחה:

(א) נתונה קב' של קב' פתוחות: $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. נסמן $U=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$.

לכל $x\in U$, יש $\alpha\in I$ כך ש- $x\in U_\alpha$. אז U_α היא סביבה של x המוכלת ב- U, ולכן מהגדרה U פתוחה. $\square$

(ב) נתונה קב' של קב' סגורות: $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$. נסמן $F=\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha$.

נראה כי המשלים של F הוא קב' פתוחה:

$$X\setminus F = X\setminus\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}\underbrace{(X\setminus F_\alpha)}_{\text{קב' פתוחות}}\overset{}{\underset{(\text{א})}{=}}\text{קב' פתוחה}\ \square$$

התכנסות סדרה: (הגדרה II)

הגדרה: נתונה סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ ונתון $x\in X$. נאמר כי הסדרה מתכנסת ל-x אם לכל סביבה U של x, יש N טבעי כך שלכל $n\ge N$: $x_n\in U$.

מסמנים: $\lim_{n\to\infty}x_n=x$, $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$.

הגדרת גבול לפי קושי $\Longleftrightarrow$ הגדרת גבול II:

נראה את השקילות במקרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ כאשר $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}z$. (הגדרת הגבול לפי קושי)

($\Longrightarrow$) נניח כי בכל סביבה של z נמצאים כמעט כל איברי הסדרה.

א. נניח כי $z\in\mathbb{C}$. לכל $\varepsilon>0$, נסמן $B_{z,\varepsilon}=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta-z|<\varepsilon\}$

(עיגול פתוח ברדיוס ε סביב z. זהו סביבה של z.)

לכן יש N טבעי כך ש- $n\ge N \Leftarrow z_n\in B_{z,\varepsilon}$, כלומר $|z_n-z|<\varepsilon$.

זה אומר ש- $\lim_{n\to\infty}z_n=z$ לפי הגדרת גבול סדרה.

ב. נניח כי $z=\infty$. לכל $A>0$ נגדיר $U_A=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|>A\}\cup\{\infty\}$.

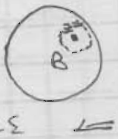
זוהי קב' פתוחה ב- $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ המכילה את ∞ (תזכורת: סביבה של ∞).

לכן יש N טבעי כך ש- $n\ge N \Leftarrow z_n\in U_A$.

לכן $|z_n|>A$, וזה אומר ש- $\lim z_n=\infty$ (לפי קושי)

($\Longleftarrow$) נניח כי $\lim_{n\to\infty}z_n\overset{\text{לפי קושי}}{=}z$ ונוכיח כי בכל סביבה של z

נמצאים כמעט כל איברי הסדרה.

א. נניח כי $z\in\mathbb{C}$. תהי U סביבה של z. אם $U\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ו- $\infty\in U$,
אז ראינו כי $U\setminus\{\infty\}$ פתוחה ב-$\mathbb{C}$, ועדיין $z\in U\setminus\{\infty\}$.
יש אפוא כדור B כך ש- $z\in B\subset U\setminus\{\infty\}$. ומאחר שהנחנו כי z הוא הגבול
של B (אפשר להקטין את B - ). נניח כי B הוא ברדיוס $\varepsilon>0$,
ולכן יש N גדול כך ש- $n\geq N \Rightarrow |z_n-z|<\varepsilon$.
כלומר, $n\geq N \Rightarrow z_n\in B\subset U$.
ב. $z=\infty$: תרגיל.

<u>למה:</u>
נניח כי $F\subset X$ ($X=\mathbb{C}, \mathbb{C}\cup\{\infty\}$-ש), אז
F סגורה $\Longleftrightarrow$ לכל סדרה מתכנסת שאיבריה ב-F, גם הגבול שייך ל-F.
<u>הוכחה:</u>
נניח כי F סגורה. נניח כי $\{z_n\}\subset F$ מתכנסת ל-$z\in X$.
נניח בשלילה כי $z\notin F$, כלומר $U=X\setminus F\ni z$.
U פתוחה, ולכן U היא סביבה של z, ולכן כמעט כל איברי הסדרה
שייכים ל-U. בסתירה. (כל איברי הסדרה שייכים ל-F)