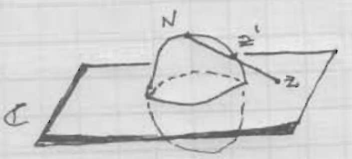
27/10/09

מרוכבות - תרגול 2



הטלה סטריאוגרפית

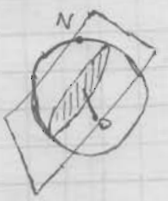
$S: \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$

מ- $x+yi \longmapsto \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$

$S^{-1}: S^2\setminus\{N\} \to \mathbb{C}$ כך ש- $(x_1,x_2,x_3) \longmapsto \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$ כש- $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$

תרגיל:

מהי תמונה של מעגל ב- S^2 תחת ההעתקה S^{-1}.



פתרון:

המעגל מתואר ע"י מישור (כי הוא חיתוך של מישור עם S^2).

משוואת מישור: $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a_0$.

מרחק הראשית מהמישור: (מהמשוואה-ההסבר)
$$\frac{|a_0|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} < 1$$

נמצא את $x+yi \in \mathbb{C}$ כך ש- $S(x+iy)$ יהיה על המישור הנ"ל.

כלומר:
$$a_1\cdot\frac{2x}{x^2+y^2+1}+a_2\cdot\frac{2y}{x^2+y^2+1}+a_3\cdot\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}=a_0$$

$$2a_1x+2a_2y+a_3(x^2+y^2-1)=a_0(x^2+y^2+1)$$

$$(a_3-a_0)(x^2+y^2)+2a_1x+2a_2y=a_3+a_0$$

$a_3=a_0$ — ישר: $2a_1x+2a_2y=2a_3$

המשוואה המקורית היא: $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a_3$

$N=(0,0,1)$ על המישור

[המישורים העוברים דרך N הם ישרים]

$a_3\neq a_0$: נחלק ב- (a_3-a_0)
$$x^2+\frac{2a_1}{a_3-a_0}x+y^2+\frac{2a_2}{a_3-a_0}y=\frac{a_0+a_3}{a_3-a_0}$$

$$\frac{a_0+a_3}{a_3-a_0}=\Big(x+\underbrace{\frac{a_1}{a_3-a_0}}_{A}\Big)^2-\left(\frac{a_1}{a_3-a_0}\right)^2+\Big(y+\underbrace{\frac{a_2}{a_3-a_0}}_{B}\Big)^2-\left(\frac{a_2}{a_3-a_0}\right)^2$$

$$(x+A)^2+(y+B)^2=\frac{a_3^2+a_2^2+a_1^2-a_0^2}{(a_3-a_0)^2}>0 \Longrightarrow \text{מעגל}$$

מהנתון שהנחנו בהתחלה (מרחק מהמישור < 1)

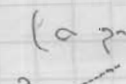
תרגיל:

נתון $f(z)=z^2$. תאר את התמונה של ישר l נתון ($f(l)$)

פתרון:

$l=\{t\cdot a+b \mid t\in\mathbb{R},\ a,b\in\mathbb{C}\}$ (קבועים). מקרה I: $b=0$ (כלומר $0\in l$ - הישר עובר דרך 0)

אז נקבל $l=\{ta \mid t\in\mathbb{R}\}$ ואז $f(l)=\{t^2\cdot a^2 \mid t\in\mathbb{R}\}$ ← קרן:



(בשונה מהמקור לא כל הישר)
[כשאם a^2 ← (2θ)]

מקרה II: $b\neq 0$ ($0\notin l$)

$z\in l$:
$$z^2=(ta+b)^2=a^2\left(t+\frac{b}{a}\right)^2$$

נניח אם נרצה להבין את ההעתקה של $(t+c)^2$: $(t+c)^2 = \underbrace{t^2+2c\cdot t}+c^2$ $t\in\mathbb{R}$

הוספת c^2 זו הזזה של ההעתקה. נסמן: $c=c_1+c_2 i$: $\underbrace{t^2+2c_1 t}_{x}+(\underbrace{2c_2 t}_{y})i$

אז $y=2c_2 t$ ו- $x=t^2+2c_1 t$ (לכל ממשי)

$\Downarrow$

$t=\frac{y}{2c_2}$, נציב: $x=\left(\frac{y}{2c_2}\right)^2+2c_1\cdot\frac{y}{2c_2} \Leftarrow x=\left(\frac{y}{2c_2}+c_1\right)^2-c_1^2$

← פרבולה

(משפחת פרבולות עם הזזה ב-c^2

לכל ממשי פרבולה)

התכנסות סדרות

משפט:

$\{w_n\},\{z_n\}\subseteq\mathbb{C}$ סדרות מתכנסות. הוכיחו שה-$\{z_n w_n\}$ סדרה מתכנסת,

ו: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n\cdot w_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} w_n$

הוכחה:

נסמן $z=\lim z_n$, $w=\lim w_n$. נשים לב: $|z\cdot w-z_n w_n|\le$

$\le|zw-z_n w|+|z_n w-z_n w_n|\le|w||z-z_n|+|z_n||w-w_n|$

$\{z_n\}$ חסומה (כי היא מתכנסת), לכן קיים $A>0$ כך ש- $|z_n|<A$ לכל n.

יהי $\varepsilon>0$. קיים N_1 כך ש- $|z_n-z|<\varepsilon$ לכל $n>N_1$, ולכל N_2 כך ש- $\forall n>N_2: |w_n-w|<\varepsilon$

נבחר $N=\max\{N_1,N_2\}$. אז לכל $n>N$, $|z_n w_n-zw|\le|w|\cdot\varepsilon+A\cdot\varepsilon=(|w|+A)\cdot\varepsilon$ ∎

דוגמאות לסדרות:

① $z_n=\frac{1}{n}(\cos n+i\sin n)$ ← סדרה מתכנסת $|z_n|=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ $\overset{\text{לכן}}{\Leftarrow}$ $z_n\to 0$

② $\{n\cdot z^n\}_{n=1}^{\infty}$ עבור $z\in\mathbb{C}$ נתון. אם $\underset{\sim}{|z|<1}$:

$|nz^n|=n\cdot|z|^n\xrightarrow{n\to\infty}0$

אם $\underset{\sim}{|z|\ge 1}$: $|nz^n|=n\cdot|z|^n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ לכן $nz^n\to$ "∞" במובן הזה.

③ נגדיר: $\arg:\mathbb{C}\to[-\pi,\pi)$.

דוגמה: $\mathbb{R}\ni a_n=\arg\left(\underbrace{\frac{2+ni}{1-ni}}_{u_n}\right)$ האם a_n מתכנסת ולאן?

$u_n=\frac{2+ni}{1-ni} \Leftarrow u_n=\frac{\frac{2}{n}+i}{\frac{1}{n}-i}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{i}{-i}=-1$ ← מה קורה עם ה-arg?

$\frac{2+ni}{1-ni}=\frac{(2+ni)(1+ni)}{1+n^2}=\underbrace{\frac{2-n^2}{1+n^2}}_{\to -1}+\underbrace{\frac{3n}{1+n^2}}_{\to 0}i$ ↗ u_n בחצי העליון, לכן $\arg(u_n)\xrightarrow{n\to\infty}\pi$

(שימו לב ש- $\arg(\lim u_n)=\arg(-1)=-\pi$)