מרוכבות - שיעור 3

פרק ב': טופולוגיה במישור המרוכב

הגדרה - גבול: נתונה סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$. נאמר כי הסדרה מתכנסת ל- $z \in \mathbb{C}$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N טבעי כך שלכל $n \geq N$: $|z_n - z| < \varepsilon$.

באופן שקול: $|z_n - z| \leq \varepsilon$ או $|z_n - z| \leq \theta \cdot \varepsilon$ כש- $\theta>0$ קבוע.

הערה: נסמן $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. קל לראות כי כאשר יש גבול הוא יחיד.
($|z-z'| = |z-z_n+z_n-z'| \leq |z-z_n| + |z_n - z'| < 2\varepsilon$ ולכן $z-z'=0$)

טענה:

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \iff Re(z_n) \to Re(z) \text{ וגם } Im(z_n) \to Im(z)$$

הוכחה:

נסמן $z_n = x_n + y_n i$, $z = x+yi$. ראינו כי $|Re(z')|, |Im(z')| \leq |z'|$ לכל $z' \in \mathbb{C}$.
נציב $z' = z_n - z$: $|x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z|$.

($\Leftarrow$) נניח כי $z_n \to z$. יהי $\varepsilon>0$. קיים N כך ש $n \geq N \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$
ואז $\forall n\geq N.\ |x_n - x|, |y_n - y| < \varepsilon$ ולכן $x_n \to x$, $y_n \to y$.

($\Rightarrow$) נניח כי $x_n \to x$ ו- $y_n \to y$. יהי $\varepsilon>0$. לכן קיים N כך ש $\forall n\geq N.\ |x_n - x|, |y_n - y| < \varepsilon$
ולכן לכל $n \geq N$: $|z_n - z|^2 = (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < 2\varepsilon^2$ ולכן $\forall n\geq N.\ |z_n - z| < \sqrt{2}\,\varepsilon$. ∎

הגדרה: (שאיפה ל- ∞)

נתונה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. נאמר ש- $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ אם $|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$,
כלומר לכל $M>0$ קיים N טבעי כך שלכל $n \geq N$: $|z_n| > M$.

דוגמאות: ① $z_n = n = n + 0\cdot i$. $Re(z_n) = n \to \infty$, $Im(z_n) = 0 \to 0$

② $z_n = n + \cos(\pi n)\cdot i$, $Re(z_n) \to \infty$, $Im(z_n)$ לא מתכנס.

טענה:

נתונה סדרה $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, ונתון $z \in \mathbb{C}$.

אזי מתקיים: (1) $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \iff |z_n - z| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

מקרה פרטי של 1: (2) $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$

(3) אם $z_n \to z$, אז $|z_n| \to |z|$

(4) אם $z_n \to z$, אז $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה (כלומר $\{|z_n|\}$ חסומה)

(5) אם $z_n \to z$ ו- $z \neq 0$, אז כמעט כל איברי הסדרה שונים מ-0.

קושי (6) $\{z_n\}$ מתכנסת (כאיבר ב-$\mathbb{C}$) $\Leftrightarrow$ $\{z_n\}$ היא סדרת קושי.

BW (7) לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.

(8) חשבון גבולות לסדרות מתכנסות: - סכום סדרות $\to$ סכום הגבולות

- מכפלת סדרות $\to$ מכפלת הגבולות. - מנת סדרות $\to$ מנת הגבולות
(הסדרה במכנה $\neq 0$)

<u>הוכחה:</u>

(3) $\underbrace{\big||z_n|-|z|\big|}_{\geq 0} \overset{\Delta}{\leq} |z_n - z| \to 0$ ומכאן $|z_n|-|z| \to 0$.

(4) מכיון ש- $|z_n| \to |z|$, הסדרה $\{|z_n|\}$ חסומה.

(5) בגלל ש- $|z_n| \to |z| \neq 0$ אז קיים N כך שלכל $n \geq N$: $|z_n| \neq 0$ ולכן $z_n \neq 0$.

(6) נניח כי $\underset{x_n+y_ni}{z_n} \to \underset{x+yi}{z}$, אז לכל $\varepsilon>0$ יש N כך שלכל $n \geq N$: $|z_n - z| < \varepsilon$.
ומכאן שעבור $n, m \geq N$: $|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z - z_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

להיפך: נניח כי $\{z_n\}$ היא סדרת קושי. כיוון שלכל n,m: $|x_n - x_m|, |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|$.
אז לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך ש- $n,m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$, ולכן גם
$n,m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m|, |y_n - y_m| < \varepsilon$, ולכן $\{x_n\}$ ו-$\{y_n\}$ הם סדרות קושי, לכן הן מתכנסות
(לפי קושי לסדרות ממשיות), ולכן גם $\{z_n\}$ מתכנסת.

(7) נניח כי $|z_n| \leq M$ לכל n. מכאן ש- $|x_n|, |y_n| \leq |z_n| \leq M$ $\forall n$.
ולכן $\{x_n\}, \{y_n\}$ סדרות ממשיות חסומות. לפי BW הממשי: ל-$\{x_n\}$ יש תת-סדרה מתכנסת
$\{x_{n_k}\} \to x$, וכיוון ש-$\{y_{n_k}\}$ חסומה, יש לה תת-סדרה מתכנסת
$\{y_{n_{k_j}}\} \to y$. כמובן שגם $x_{n_{k_j}} \to x$. ולכן $z_{n_{k_j}} \xrightarrow{j\to\infty} x+yi$.

<u>התכנסות לפי קואורדינטות קוטביות</u>

נניח $z_n \to z$ כש- $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ ($r_n>0$)

<u>הערה:</u> אם $z=0$ אז ההתכנסות שקולה לכך ש- $r_n \to 0$, ואז ל-$\{\theta_n\}$ אין שום ערך.

נניח $z \neq 0$ כש- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r>0$).

נקבע ש- $-\pi \leq \theta_n, \theta < \pi$. האם $(r_n, \theta_n) \to (r, \theta)$?

כמובן ש- $|z_n| = r_n \to r = |z|$, אך לא תמיד $\theta_n \to \theta$.

<u>דוגמא:</u> יהי $a>0$. נגדיר $z_n = a(\cos(\pi - \frac{1}{n}) + i\sin(\pi - \frac{1}{n}))$,

במקרה זה $\theta_n = \pi - \frac{1}{n} \to \theta$, $z_n \to -a = a(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$ $\Leftarrow$ $\theta = -\pi$

דוגמא: $\bar{z}_n = a(\cos(\pi-\frac{1}{n}) - i\sin(\pi-\frac{1}{n}))$ $= a(\cos(-\pi+\frac{1}{n})+i\sin(-\pi+\frac{1}{n}))$. אזי $\theta_n=-\pi+\frac{1}{n}\to-\pi$ | $z_n\to -a = a(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))$

ולכן $\underbrace{\theta_n\to\theta}$.

דוגמא: $z_n=\begin{cases} a(\cos(\pi-\frac{1}{n})+i\sin(-\pi-\frac{1}{n})) & n \text{ זוגי} \\ a(\cos(-\pi+\frac{1}{n})+i\sin(-\pi+\frac{1}{n})) & n \text{ אי} \end{cases}$, אז $z_n\to -a$ אבל $\{\theta_n\}$ לא מתכנסת.

נניח כי $\theta\neq-\pi$, ונראה כי $\theta_n\xrightarrow{n\to\infty}\theta$:

$Re(z_n)=r_n\cos\theta_n\to Re(z)=r\cos\theta$

$Im(z_n)=r_n\sin\theta_n\to Im(z)=r\sin\theta$

מכיון ש- $r_n\to r$ ו- $r>0$ אז $\sin\theta_n\to\sin\theta$ ו- $\cos\theta_n\to\cos\theta$.

$\cos(\theta_n-\theta)=\cos\theta_n\cos\theta+\sin\theta_n\sin\theta \xrightarrow{n\to\infty} \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\sin(\theta_n-\theta)=\sin\theta_n\cos\theta-\sin\theta\cos\theta_n \longrightarrow \sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta=0$

$-\pi\le\theta_n<\pi$ $\Leftarrow$ סדרה חסומה. נניח בשלילה כי $\theta_n\not\to\theta$:

אז קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל k קיים $n_k>k$ כך ש- $|\theta_{n_k}-\theta|\ge\varepsilon_0$.

אפשר להניח כי $\{\theta_{n_k}\}$ מתכנסת (כי $\{\theta_{n_k}\}$ חסומה, ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת $\{\theta_{n_{k_j}}\}$ ואז נעבור ל- $\{\theta_{n_{k_j}}\}$ במקום ה- $\{\theta_{n_k}\}$).

לצורך סימונים: $\theta'_j:=\theta_{n_{k_j}}$. כלומר לכל j לפי: $|\theta'_j-\theta|\ge\varepsilon_0$, וקיים $\lim_{j\to\infty}\theta'_j=\theta'$.

כיוון ש- $\{\theta'_j\}\subseteq\{\theta_n\}$ בפרט מתקיים לכל גם של θ'_j: $\cos(\theta'_j-\theta)\to1$ ($\cos(\theta'-\theta)$), $\sin(\theta'_j-\theta)\to0$ ($\sin(\theta'-\theta)$)

ולכן $\cos(\theta'-\theta)=1$ וגם $\sin(\theta'-\theta)=0$.

אזי $\theta'-\theta=2\pi\cdot m$ כש- $m\in\mathbb{Z}$.

כאן גם, $\varepsilon_0\le|\theta'-\theta|<2\pi$ ← סתירה! (כי ההפרש הוא בגודל קטן מ- 2π, ואינו אפס כי הוא גדול מ- ε_0)

כי $-\pi<\theta<\pi$ ו- $-\pi\le\theta'\le\pi$

← הראינו כי ההעתקה $\mathbb{C}\setminus\{x\le0\}\to\mathbb{R}_+\times(-\pi,\pi)$ ע"י $z\mapsto(r,\theta)$ היא רציפה.

קבוצות פתוחות וקבוצות סגורות

<u>הגדרה:</u> (קבוצה פתוחה)

תת קבוצה $\emptyset\neq U\subset\mathbb{C}$ נקראת פתוחה (ב- $\mathbb{C}$) אם לכל $z\in U$ יש עיגול פתוח (קיים) B כך ש- $z\in B\subset U$.

<u>הערה:</u> לפי ~~ההגדרה~~ קובעים כי $\emptyset$ פתוחה.

<u>הגדרה:</u> (קבוצה סגורה)

תת קבוצה של $\mathbb{C}$ נקראת סגורה אם המשלים שלה הוא קב' פתוחה.

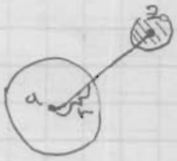
<u>הערה:</u> הקב' הריקה $\emptyset$ היא גם סגורה.

העיגול בפנים המעגל

דוגמאות: ① עיגול פתוח: $\{z\in\mathbb{C} : |z-a|<r\}$ = מעגל סביב a. ← קב' פתוחה.

(כי היא מכילה עיגול סביב כל נק' בה)

② עיגול סגור: $F=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|\le r\}$ ← קב' סגורה



הוכחה: צריך להראות ש- F^c היא קב' פתוחה: $F^c=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|>r\}$.

יהי $z_0\in F^c$: $|z_0-a|>r$. נראה עיגול סביבו בפנים: (סביב z_0)

$B=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<\frac{1}{2}(|z_0-a|-r)\}$. נראה כי $B\subset\mathbb{C}\setminus F$: יהי $z\in B$.

$$|z-a| = |z-z_0+z_0-a| \underset{\Delta}{\geq} |z_0-a|-|z-z_0| > |z_0-a|-\frac{1}{2}(|z_0-a|-r) = \frac{1}{2}|z_0-a|+\frac{1}{2}r > \frac{1}{2}r+\frac{1}{2}r = r$$

$\Longrightarrow$ $z\notin F$ ולכן $z\in\mathbb{C}\setminus F$ כנדרש. $\square$

③ המשלים של עיגול סגור היא קב' פתוחה, והמשלים של עיגול פתוח - קב' סגורה.

הגדרה: (קב' פתוחה במישור המורחב) * המישור המורחב: $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$

תהי $U\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. נאמר כי U פתוחה ב- $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ אם:

(1) אם $\infty\notin U$ אז (בנוסף) $U\subset\mathbb{C}$ פתוחה ב-$\mathbb{C}$.

(2) אם $\infty\in U$ אז (בנוסף) ש- $\mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus U$ היא קב' סגורה וחסומה (ב-$\mathbb{C}$) ← כאשר ש-U כולל ∞ לא פתוחה

הגדרה: (קב' סגורה במישור המורחב)

קב' $F\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ תקרא סגורה (ב-$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$) אם המשלים שלה היא קב' פתוחה.

דוגמאות:

$\underbrace{\{z\in\mathbb{C}: |z-a|>r\}}_{F^c_{\mathbb{C}}}\cup\{\infty\}$ היא קב' פתוחה במישור המורחב.