

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k = \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \quad \text{für } |z| \neq 1 \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1} \quad \text{für } z \neq 1$$

($z \neq 1$) wenn $|z| < 1$ dann $|z|^k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, $\frac{1}{1-z}$ ist Grenzwert für $|z| < 1$ und $|z| > 1$ dann $|z|^k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$

(Leibniz Kriterium): Leibniz

Sei $a \leq R < \infty$ und $\{a_n\}$ eine Folge von reellen Zahlen, dann gilt für $|z| < R$

$$[a, R) \quad |z| < R \quad \text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

$$[a, R) \quad |z - z_0| \leq r_0 < R \quad \text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2)$$

$$|z| > R \quad \text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (3)$$

zu zeigen:

$$[a, \infty) \quad R = \infty \quad \text{dann gilt} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{für } R = \infty$$

$$[a, \infty) \quad R = \infty \quad \text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| \right\} \quad \text{für } |z| < R \quad \text{dann gilt} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| \right\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| \right\}$$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{r} \quad \text{für } N \in \mathbb{N} \quad \text{dann gilt} \quad \frac{1}{r} > \frac{1}{R} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k]{|a_k|} \right\} \quad \text{für } |z| < R \quad \text{dann}$$

$$\text{gilt} \quad |a_n| < \frac{1}{r^n} \quad \text{für } n \geq N \quad \text{dann gilt} \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r} \quad \text{für}$$

$$\text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{r} \right)^n \quad \text{für } \frac{|z|}{r} < 1 \quad \text{dann gilt} \quad |a_n z^n| < \frac{|z|^n}{r^n} = \left(\frac{|z|}{r} \right)^n$$

$$\text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \quad \text{für } |z| < R$$

$$|z| \leq r_0 < R \quad \text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \quad \text{für } |z| \leq r_0 < R \quad \text{dann gilt} \quad (2)$$

$$|a_n z^n| < \left(\frac{|z|}{r} \right)^n \leq \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \quad \text{für } n \geq N \quad \text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \quad \text{für } \left(\frac{r_0}{r} \right) < 1$$

$$\text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \quad \text{für } |z| \leq r_0 < R$$

$$\left(\frac{r_0}{r} \right) < 1 \quad \text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \quad \text{für } \left(\frac{r_0}{r} \right) < 1$$

$$|z| > R \quad \text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \quad \text{für } |z| > R \quad \text{dann gilt} \quad (3)$$

$$\text{Sei} \quad \frac{1}{r} < \sup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k]{|a_k|} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad \text{dann gilt} \quad \frac{1}{r} < \frac{1}{R} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k]{|a_k|} \right\}$$

$$|a_n z^n| > \left(\frac{|z|}{r} \right)^n \quad \text{für } n \geq N \quad \text{dann gilt} \quad |a_n z^n| > \frac{1}{r^n} \quad \text{für } n \geq N \quad \text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \quad \text{für } |z| > R$$

$$\text{dann gilt} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \quad \text{für } |z| > R$$

(Leibniz) $\square$



$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$