

נסח הבעיה

20 נקודה 0 היא שיתוף של $z_0 \in U$ ו- U איננה תת-קבוצה של $\mathbb{C}$ (20 נקודה)

(30)
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$
 : אופן U -ו סגור
(0-ו לסגור עצמו -1-ו)



$z \in B$, $B \subset D$ ו- z_0 נקודה R סביב B היא שיתוף z_0 ו- $z \in D$ ו- z_0

נסח

$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)(1-\frac{z-z_0}{z-z_0})}$, וכן $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$: אופן שיתוף

$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{R} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{R}} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{R}\right)^n$ $\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-z_0}{R}\right)^n\right) d\zeta$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z-z_0)^n$

$\frac{|z-z_0|}{R} < 1$ וכן $|z-z_0| < R$ ו- $M = \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|$ וכן $\frac{|f(z)|}{|z-z_0|} \cdot \left|\frac{z-z_0}{R}\right|^n \leq \frac{M}{R} \cdot \left(\frac{|z-z_0|}{R}\right)^n$ וכן

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{R} \cdot \left(\frac{|z-z_0|}{R}\right)^n$ וכן , וכן וכן וכן וכן וכן וכן וכן

וכן , וכן (3-ו אופן) וכן וכן וכן וכן וכן וכן וכן וכן

$\square$, וכן וכן וכן $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$

נסח הבעיה

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k + r_n(z)$

$r_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \left[\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\zeta-z_0}{R}\right)^k \right] d\zeta$ $\left(\frac{z-z_0}{R}\right)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{R}}$ וכן

$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \cdot \left(\frac{z-z_0}{R}\right)^n \cdot \frac{R}{\zeta-z} d\zeta$

$= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{|z-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^k (\zeta-z)} d\zeta \right] \cdot (z-z_0)^k$

$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^k (\zeta-z)} d\zeta \cdot (z-z_0)^k$

נסח

וכן וכן וכן , R_0 סביב z_0 וכן וכן וכן $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ וכן

וכן $f(z)$ וכן וכן וכן , וכן וכן וכן $f(z)$ וכן וכן וכן

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{is unique, for } z_0 \text{ in } U. \quad (|z-z_0| < R_0) \text{ since } f \text{ is analytic}$$

$$|z-z_0| < R_0 \text{ since } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$



$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!} \quad (n \geq 0) : z_0 = 1 \text{ and } z_0 = 1, \quad f(z) = \log z$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \quad \text{for } f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{1}{z^n}, \dots, f'(z) = \frac{1}{z}, \quad f(1) = 0$$

$$\Rightarrow \log z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} (z-1)^n \quad |z-1| < 1$$

Lemma

$\forall n \geq 1, f^{(n)}(z_0) = 0$ is true, $z_0 \in U$ and U around z_0 such that $f(z)$ is

analytic in U

Proof

$z_0 \in U$ and U is a neighborhood of z_0 such that D is

$$z_0 \in D \text{ and } D \text{ is a neighborhood of } f(z) \text{ for } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n = f(z_0)$$

$$\text{and } f^{(n)}(z_0) = 0 \text{ for } n \geq 1$$

$$U_2 = U \setminus U_1, \quad U_1 = \{z \in U \mid f^{(n)}(z) = 0 \quad \forall n \geq 1\}$$

Since $z_0' \in U_1$ and U_1 is a neighborhood of z_0' , U_1 is

$$f^{(n)}(z_0') = 0 \text{ for } n \geq 1, \quad D' \text{ is a neighborhood of } f(z_0') = 0, \quad U_2 \text{ is a neighborhood of } D'$$

$$D' \subseteq U_1 \text{ for } D' \text{ is}$$

$$f^{(n)} \text{ is analytic, } a \in U \text{ and } \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq U_1 \text{ and } z_k \rightarrow a$$

$$n \geq 1 \text{ and } f^{(n)}(a) = 0 \text{ for } f^{(n)}(z_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f^{(n)}(a)$$

$$U = U_2 \cup U_1 \text{ and } U_2 = \emptyset \text{ or } U_1 = \emptyset, \text{ so } U = \emptyset$$

$$\square \quad U \text{ is a neighborhood of } f \iff z \in U \text{ and } f'(z) = 0 \iff$$