מרוכבות - שיעור 11

24/11/09

הערה

טענה: אין ענף של לוג ב- $U\setminus\{c\}$ כאשר U הוא תחום.

הוכחה: נניח כי קיים ענף כזה ב- U הוא ... (בשלילה, ונניח שקיים ענף $F(z)$). $U' = U\setminus\{x\in\mathbb{R}: x\leq a\}$. כמו כן ידוע שקיים $n\in\mathbb{Z}$ כך ש- $F(z)=\mathrm{Log}\, z+2\pi ni$ $(z\in U')$

אז $F(z)=\log|z|+i\,\mathrm{Arg}\, z+2\pi ni \Rightarrow \mathrm{Arg}\, z = \frac{F(z)-\log|z|-2\pi ni}{i}$. $\forall z\in U'$.

יהי $a\in U$. ניקח $z\to a$ כך ש- $z\in U'$. מצד שני לימין יש גבול כאשר $z\to a$ מתוך U':

$\exists \lim_{U'\ni z\to a} \frac{F(z)-\log|z|-2\pi ni}{i}$, אבל ידוע כי לא קיים $\lim_{U'\ni z\to a} \mathrm{Arg}\, z$ ואין לו גבול. סתירה!

פונקצית חזקה:

$f(z)=z^b$ $(b\in\mathbb{C})$, כהגדרה: $z^b := e^{b\cdot\log z}$.

בכל תחום U שבו מוגדר ענף של לוג, נגדיר ב- $\log z$ (כאשר $c\notin U$).

כך נקבל ענף של z^b ב- U (דוגמא: $\sqrt{z}=z^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}\log z}$).

הענף הראשי: $z^b=e^{b\,\mathrm{Log}\, z}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{x\leq 0\}$.

אם b שלם אז z^b לא תלוי בבחירת הענף של לוג, כי אם $f_1(z), f_2(z)$ הם שני ענפים של לוג (בתחום נתון U) אז $f_2(z)=f_1(z)+2\pi ni$ לכל $z\in U$ $(n\in\mathbb{Z})$.

$$z^b=e^{bf_2(z)}=e^{bf_1(z)+2\pi bni}=e^{bf_1(z)}\cdot\underbrace{e^{2\pi bni}}_{1}=e^{bf_1(z)}$$

אם b רציונלי: $b=\frac{m}{n}$ כשבר מצומצם. אז ל- $z^{\frac{m}{n}}$ יש n ענפים שונים.

כמו קודם, לכל ענף של לוג:

$$z^{\frac{m}{n_0}}=e^{bf_2(z)}=e^{bf_1(z)}\cdot\underbrace{e^{2\pi i\cdot\frac{m}{n_0}\cdot n}}$$

$$\underbrace{e^{2\pi ikn}}_{1}\cdot e^{\frac{2\pi il}{n_0}}$$

$\frac{n}{n_0}=k+\frac{l}{n_0}$, כאשר $0\leq l<n_0$

דוגמא: נמצא את $\sqrt{-1+i}$ לפי הענף הראשי של $\sqrt{z}$.

$$e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(-1+i)}=e^{\frac{1}{2}(\log|-1+i|+i\,\mathrm{Arg}(-1+i))}=e^{\frac{1}{2}(\log\sqrt{2}+i\cdot\frac{3\pi}{4})}=\sqrt[4]{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{8}i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

מתקיימות רק כי: $z^{b_1+b_2}=z^{b_1}\cdot z^{b_2}$, אבל $(z_1z_2)^b\neq z_1^b z_2^b$, $(z^u)^v\neq z^{uv}$

($(e^u)^v\neq e^{uv}$:גם)

z^b מוגדרת כהרכבה ולכן היא אנליטית ב- U.

$$z^b=e^{b\log z}\Rightarrow (z^b)'=(e^{b\log z})'=e^{b\log z}\cdot\frac{b}{z}=bz^{b-1}$$

הפונקציה הטריגונומטרית

ל- $x\in\mathbb{R}$: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ $\qquad\left(e^{\bar z}=\overline{e^{z}}\right)$

ניתן לחבר את 2 המשוואות ונקבל:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos x&=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x&=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{aligned}}\qquad x\in\mathbb{R}$$

לכל z מוגדר ב- $z\in\mathbb{C}$: $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $\leftarrow$ פונקציות אנליטיות

וברור ש: $\cos(-z)=\cos(z)$, $\sin(-z)=-\sin(z)$, $\cos(z+2\pi)=\cos(z)$, $\sin(z+2\pi)=\sin(z)$

$\cos^2 z+\sin^2 z=1 \leftarrow \frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}-\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4}=\frac{4}{4}=1$ מ.ש.ל.

$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v$, $\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v$

נגזרות: $(\sin z)'=\cos z$, $(\cos z)'=-\sin z$ $\leftarrow$ $\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)'=\frac{1}{2}(e^{iz}\cdot i+e^{-iz}\cdot(-i))$

$\leftarrow e^{iz}=\cos z+i\sin z$ $\qquad =\frac{i}{2}(e^{iz}-e^{-iz})=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{-2i}=-\sin z$

דוגמא: נפתור: $\sin z=2$, כלומר $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2 \Rightarrow e^{iz}-\frac{1}{e^{iz}}=4i$

ולכן $(e^{iz})^2-4i\cdot e^{iz}-1=0 \Rightarrow e^{iz}\underset{\text{נוסחת השורשים}}{=}(2\pm\sqrt{3})i \Rightarrow iz=\log(2\pm\sqrt{3})i$

$\Rightarrow iz=\log(2\pm\sqrt{3})+i\cdot\arg\left((2\pm\sqrt{3})i\right) \Rightarrow iz=\log(2\pm\sqrt{3})+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) \underset{(n\in\mathbb{Z})}{\Rightarrow} z=\frac{\pi}{2}+2\pi n-i\log(2\pm\sqrt{3})$

טורי מספרים

התכנסות

הגדרה: טור מרוכבים $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס (למספר ב-$\mathbb{C}$) אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת: $S_n=\sum_{k=1}^{n} z_k$.

תנאי הכרחי להתכנסות הוא: $z_n\xrightarrow{n\to\infty}0$ (כי $z_n=S_n-S_{n-1}\to S-S=0$ אם $S_n\to S$)

התכנסות בהחלט

הגדרה: טור מרוכבים $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ מתכנס.

משפט: • טור מתכנס בהחלט הוא מתכנס.

• נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|<\infty$, אז נראה ש- $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי:

$$|S_n-S_m|=\left|\sum_{k=1}^{n}z_k-\sum_{k=1}^{m}z_k\right|\underset{n\geq m}{=}\left|\sum_{k=m+1}^{n}z_k\right|\leq\sum_{k=m+1}^{n}|z_k|\xrightarrow{m,n\to\infty}0$$

לכן $S_n-S_m\xrightarrow{m,n\to\infty}0$. וכיוון ש- $\{S_n\}$ סדרת קושי, היא מתכנסת.

גבול נקודתי

הגדרה: נניח כי $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת פונקציות המוגדרות בקב' U . אם לכל $z\in U$

קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}f_n(z)=:f(z)$, אז $f(z)$ היא פונקציה ב-U גם כן.

זה הגבול הנקודתי של $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ על U . $\lim_{n\to\infty}f_n=f$.

התכנסות במ"ש

הגדרה: נאמר כי $f_n\xrightarrow{n\to\infty}f$ במ"ש ב-U , אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך ש:

$|f_n(z)-f(z)|\leq\varepsilon$, $\forall z\in U$, $\forall n\geq N$.