מרוכבות - תרגול 10

22/12/09

נוסחת קושי:

f אנליטית בתחום U, $a\in U$, γ - מסילה הומוטופית לנק' סביב a שאינה ב-U,

אז
$$\boxed{\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\cdot n(\gamma,a)\cdot f(a)}$$

מספר הליפות

מסקנות:

(1) נוסחת קושי לנגזרת ה-n-ית:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

כאשר C מעגל סביב a (המוכל ב-U)

(2) משפט ליוביל:

f שלמה (אנליטית בכל $\mathbb{C}$) וחסומה, אז f קבועה.

תרגיל 1: $I := \int_{|z|=2} \frac{e^z/(z-3)^2}{z+1}\,dz = \int_{|z|=2}\frac{e^z}{(z+1)(z-3)^2}\,dz$. הפונקציה $e^z/(z-3)^2$ אנליטית

ב- $\{|z|<2\frac{1}{2}\}$ סגור, ולכן מנוסחת קושי נקבל $(a=-1)$: $I = \left[e^z/(z-3)^2\right]_{z=-1}\cdot 2\pi i = \frac{e^{-1}}{16}\cdot 2\pi i = \frac{\pi i}{8e}$

תרגיל 2: חשב את $\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt$.

$$\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}}{t^2+1}\,dt$$

[sin אי-זוגית (cos-זוגית) ולכן נקבל מהאינטגרל המלא]

ניקח מסילה (סגורה)

נקבל:

$$\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = \int_{-r}^{r}\frac{e^{it}}{t^2+1}\,dt + \underbrace{\int_0^\pi \frac{e^{ire^{it}}}{1+r^2e^{2it}}\cdot ire^{it}\,dt}_{J}$$

[כי על המעגל הפרמטריזציה, $z(t)=re^{it}$ ו- $z'(t)=ire^{it}$, ועל הישר ...]

נראה שהאינטגרל הזה שואף ל-0 כש- $r\to\infty$:

$$|J|\le\int_0^\pi\left|\frac{e^{ire^{it}}}{1+r^2e^{2it}}\right|\cdot r\cdot dt = r\cdot\int_0^\pi\frac{e^{-r\sin t}}{|1+r^2e^{2it}|}\,dt$$

הערה: $|1+r^2e^{2it}| \underset{|a+bi|}{=} \sqrt{(1+r^2\cos 2t)^2+(r^2\sin 2t)^2} = \sqrt{1+r^4+2r^2\cos 2t} \ge \sqrt{1-2r^2+r^4} = |1-r^2|$

$$\Rightarrow |J|\le\frac{r}{r^2-1}\cdot\underbrace{\int_0^\pi e^{-r\sin t}\,dt}_{=2\int_0^{\pi/2}e^{-r\sin t}}\le\frac{2r}{r^2-1}\underbrace{\int_0^{\pi/2}e^{-\frac{2}{\pi}rt}\,dt}_{\text{חסום}}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$$

לכן $|J|\to 0$ ולכן

$$\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = \int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}/(z+i)}{z-i} \underset{\text{נוסחת קושי}}{=} 2\pi i\cdot 1\cdot\left.\frac{e^{iz}}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{2\pi i e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

$a=i$ בתוך הקטע המעגל

ולא $a=-i$ שאינו בה

כלומר, כאשר נשאיף $r\to\infty$ נקבל ש:

$$\int_0^\infty\frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{e}$$

__למה:__

f, g אנליטיות בתחום U, ויהי $D\subseteq U$ תחום. נניח כי $f|_{\partial D} = g|_{\partial D}$

אז $f|_D = g|_D$.

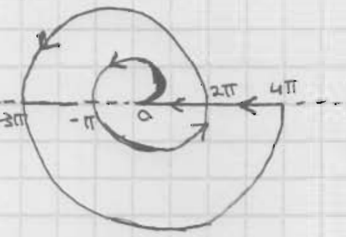
__הוכחה:__

מהנוסחה קושי $\underset{\text{int}(D)}{\forall a\in B}.\ f(a) \underset{\text{קושי}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{g(z)}{z-a}\,dz \underset{\text{קושי}}{=} g(a)$ $\blacksquare$

__שאלה 3:__ חשב $\int_\gamma \frac{z^2+1}{(z+1)(z+4)}\,dz$, כאשר γ היא המסילה $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$

כאשר $\gamma_1: z(t)=te^{it}$, ו-$\gamma_2: z(t)$ = הקטע 4π בכיוון הפוך, כאשר $0\le t\le 4\pi$.

__פתרון:__



נשים לב ש- $\frac{1}{(z+1)(z+4)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+4}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\cdot\int_\gamma \frac{z^2+1}{z+1}\,dz - \frac{1}{3}\int_\gamma\frac{z^2+1}{z+4}\,dz =$$

$$\underset{\text{קושי}}{=} \frac{1}{3}\cdot 2\pi i\Big[\underset{n(\gamma,-1)}{2}\cdot((-1)^2+1) - \underset{n(\gamma,-4)}{1}\cdot((-4)^2+1)\Big] = -\frac{26\pi i}{3}$$