מרוכבות - שיעור 19

22/12/09

משפט:

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום U.

אז $f'(z)$ אנליטית ב-U, ולכן $f(z)$ גזירה אינסוף פעמים ב-U.

יתר על כן, תהי $z\in U$ ויהי D עיגול סגור כך ש- $z\in D\subseteq U$, ויהי C מסלול סגור ב-D ומקיף את z. אז לכל n טבעי:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{F(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta$$

הוכחה:

יהיו C, D ו-z כנ"ל. מנוסחת האינטגרל של קושי $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ $\left(n(C,z)=1\right)$

פורמלית, נגזור לפי z בתוך האינטגרל: $f^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\zeta=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{F(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta$ → צריך להצדיק

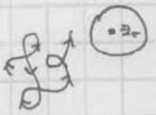
ולכן נותר רק להצדיק גזירה בתוך האינטגרל:

לשם זה נוכיח את הלמה הבאה.

למה: תהא γ מסילה חלקה למקוטעין ותהא $\varphi(\zeta)$ רציפה על γ. נגדיר ל-m טבעי: $F_m(z)=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^m}\,d\zeta$

עבור $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma$. אז $F_m(z)$ אנליטית ב-$\mathbb{C}\setminus\gamma$ וגם $F_m'(z)=m\cdot F_{m+1}(z)$

הוכחה: (באינדוקציה על m)



עבור $\underline{m=1}$: נראה תחילה כי F_1 רציפה (ב-$\mathbb{C}\setminus\gamma$). תהי $z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma$.

ל-γ קבוצה סגורה (כי היא תמונה רציפה של קטע - קומפקטית), ולכן $\mathbb{C}\setminus\gamma$ - פתוחה, ולכן קיים

כך ש... קיים $\delta>0$ ... (מרחק חיובי ממנה) כך שכל ... סביב z_0,

מוכל ב-$\mathbb{C}\setminus\gamma$. נניח כי $|z-z_0|<\frac{\delta}{2}$. אז

$$F_1(z)-F_1(z_0)=\int_\gamma\left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}\right)d\zeta=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)\cdot(z-z_0)}{(\zeta-z)\cdot(\zeta-z_0)}\,d\zeta \quad (*)$$

$$\Longrightarrow |F_1(z)-F_1(z_0)|=|z-z_0|\cdot\left|\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}\,d\zeta\right|\le|z-z_0|\cdot\max_{\zeta\in\gamma}\frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta-z|\cdot|\zeta-z_0|}\cdot l(\gamma)$$

אבל $|\zeta-z_0|>\delta$ ולכן $|\zeta-z|=|\zeta-z_0-(z-z_0)|\ge|\zeta-z_0|-|z-z_0|>\delta-\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2}$

$$\Longrightarrow |F_1(z)-F_1(z_0)|\le|z-z_0|\cdot\frac{2}{\delta^2}\cdot l(\gamma)\cdot\underset{\max_{\zeta\in\gamma}|\varphi(\zeta)|}{M}\xrightarrow{z\to z_0}0$$

כעת $(*)$: נחלק ב-$(z-z_0)$

$$\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}=\int_\gamma\frac{\overbrace{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}^{=\varphi_1(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta\xrightarrow[\text{רציפות של }F_1]{z\to z_0}\int_\gamma\frac{\varphi_1(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\,d\zeta=F_2(z_0)$$

זה מתכנס במידה שווה כי $\varphi(\zeta)\to\varphi_1(\zeta)$.

(וראינו שאם $\varphi(\zeta)$ רציפה על γ: $\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$ רציפה על $\mathbb{C}\setminus\gamma$)

מעבר האינדוקציה:

נניח כי לכל פונקציה $g(\zeta)$ רציפה על γ מתקיים $z\mapsto\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{m-1}}\,d\zeta$ גזירה על $\mathbb{C}\setminus\gamma$ ונגזרתה היא $(m-1)\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^m}\,d\zeta$, ונוכיח עבור m.

ראשית, נראה כי $F_m(z)$ רציפה: יהי z_0 ו-δ כמו קודם. באותו אופן כמו קודם:

$$F_m(z)-F_m(z_0)=\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^m}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^m}d\zeta=$$

$$=\underbrace{\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta}+\underbrace{\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^m}d\zeta}=$$

$$=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{m-1}}\cdot\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_0}\right)d\zeta+\left(\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z_0)^{m-1}}d\zeta\right)=$$

$$=(z-z_0)\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^m(\zeta-z_0)}d\zeta+\underbrace{\left(\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z_0)^{m-1}}d\zeta\right)}_{X}\quad(*)$$

מכיוון שהפונקציה $g(\zeta)=\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}$ רציפה, הפונקציה: $z\mapsto\int\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z_0)^{m-1}}d\zeta$ רציפה, ולכן רציפה (ב-$\mathbb{C}\setminus\gamma$)

ולכן $X\xrightarrow[z\to z_0]{}0$. כדי להעריך את המחובר הראשון, כמו קודם:

$\max_{\zeta\in\gamma}|\varphi(\zeta)|=M$, $|\zeta-z_0|>\delta$, $|\zeta-z|>\frac{\delta}{2}$.

$$\Rightarrow|\text{המחובר הראשון}|\le|z-z_0|\cdot M\cdot l(\gamma)\cdot\frac{2^m}{\delta^{m+1}}\xrightarrow[z\to z_0]{}0$$

לכן הראינו כי לכל פונ' רציפה $\varphi(\zeta)$ על γ, הפונ' $z\mapsto\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^m}d\zeta$ רציפה על $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

נחלק את (*) ב-$(z-z_0)$:

$$\frac{F_m(z)-F_m(z_0)}{z-z_0}=\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^m}d\zeta+\frac{1}{z-z_0}\left(\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta-\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)/\zeta-z_0}{(\zeta-z_0)^{m-1}}d\zeta\right)$$

לפי אי-השוויון (ש-$z\mapsto\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^m}d\zeta$ רציפה) עבור הפונ' $\varphi_1(\zeta)=\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z_0}$ נקבל ש-$z\mapsto\int_\gamma\frac{\varphi_1(\zeta)}{(\zeta-z)^m}d\zeta$ רציפה על $\mathbb{C}\setminus\gamma$, ולכן $\xrightarrow[z\to z_0]{}\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}d\zeta$. (זהו המחובר הראשון במשוואה הנ"ל)

כמו כן, לפי הנחת האינדוקציה (עבור $\varphi_1(\zeta)$) נקבל ש-$z\mapsto\int_\gamma\frac{\varphi_1(\zeta)}{(\zeta-z)^{m-1}}d\zeta$ גזירה ב-$\mathbb{C}\setminus\gamma$, ונגזרתה ב-$z_0$ היא $(m-1)\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}d\zeta$. (זהו המחובר השני במשוואה הנ"ל)

ולכן מהמשוואה הנ"ל נקבל כי הנגזרת של $F_m(z)$ ב-z_0 (קיימת) ושווה ל- $mF_{m+1}(z_0)=m\int_\gamma\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}d\zeta$ ∎

משפט מוררה: (Morera)

יהי $f(z)$ פונ' רציפה בתחום U. נניח כי $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta=0$, לכל מסילה סגורה γ הנמצאת ב-U. אז $f(z)$ אנליטית ב-U.

הוכחה:

ראינו כי תנאי המשפט שקול לכך של-$f(z)$ יש קדומה אנליטית $F(z)$ ב-U: $F'(z)=f(z)$ ב-U.

מהמשפט הקודם, גם $F'(z)$ אנליטית ב-U, ולכן $f(z)$ אנליטית ב-U. ∎

הגדרה: (פונקציה שלמה)

פונקציה אנליטית בכל המישור נקראת פונקציה שלמה.

משפט ליוביל:

פונקציה שלמה חסומה היא קבועה.

הוכחה:

נניח כי $f(z)$ היא פונקציה שלמה, וחסומה $|f(z)| \le M$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

יהי $z_0\in\mathbb{C}$, ויהי C_r מעגל ברדיוס r סביב z_0. נזכיר כי $f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}\,d\zeta$

אז $|f'(z_0)| \le \frac{2\pi r}{2\pi}\cdot\max_{\zeta\in C_r}\frac{|f(\zeta)|}{\underbrace{|\zeta-z_0|^2}_{=r^2}} = \frac{1}{r}\cdot\max_{\zeta\in C_r}|f(\zeta)| \le \frac{M}{r}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$

לכן $\forall z_0\in\mathbb{C}.\ f'(z_0)=0$. כלומר $f'=0$ ב-$\mathbb{C}$, ולכן f קבועה. ∎

הערכות קושי:

נניח כי $f(z)$ היא פונקציה שלמה. יהי $C=C_{r,z}$ מעגל ברדיוס r סביב z.

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot\frac{\max_{\zeta\in C_{r,z}}|f(\zeta)|}{r^{n+1}} = \frac{n!}{r^n}\cdot M_{r,z}$$

נסמן $M_{r,z}$

המשפט היסודי של האלגברה

כל פולינום $p(z)$ (מעל $\mathbb{C}$) ממעלה חיובית יש שורש ב-$\mathbb{C}$.

הוכחה:

נניח בשלילה כי $p(z)\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$. אז $F(z)=\frac{1}{p(z)}$ שלמה (מנה של שלמות [פולינומים]) — אין התאפסות

$F(z)$ חסומה מהסיבה כי אם נכתוב $p(z)=a_nz^n+\dots+a_1z+a_0$ $(a_n\neq 0)$ אז

$\frac{1}{p(z)}=\frac{1}{z^n(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^n})}$. נשים לב כי $a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^n}\xrightarrow[z\to\infty]{}a_n$.

לכן, (בגלל ש-$a_n\neq 0$) קיים $R>0$ כך ש- $|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\dots+\frac{a_0}{z^n}|\ge\frac{|a_n|}{2}$ לכל $|z|\ge R$. (מהגדרת הגבול ב-∞)

לכל $|z|\ge R$: $\Rightarrow |p(z)|\ge|z|^n\cdot\frac{|a_n|}{2}\ge R^n\cdot\frac{|a_n|}{2}$ $\Rightarrow |F(z)|\le\frac{2}{|a_n|R^n}$ → חסום ע"י קבוע שתלוי ב-R $(|z|\ge R)$

ובגלל ש-$|z|\le R$ הינה קבוצה סגורה וחסומה, אז רציפות $F(z)$ יש חסם $L>0$ כך ש- $|F(z)|\le L$ לכל $|z|\le R$.

⇐ $F(z)$ חסומה בכל $\mathbb{C}$. ⇐ ממשפט ליוביל $F(z)$ קבועה, ולכן גם $p(z)$ קבועה, בסתירה! ∎

דוגמה:

$$\int_{|z|=\frac12}\frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz=\int_{|z|=\frac12}\frac{\overbrace{\frac{\cos z}{z-1}}^{f(z)}}{(z-0)^2}\,dz=2\pi i\,f'(0)$$

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

$$=2\pi i\cdot\frac{\sin z\cdot(z-1)-\cos z}{(z-1)^2}\Big|_{z=0}=-2\pi i$$

דוגמה:

$$\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^2(z-1)}=\text{(פירוק לשברים חלקיים)}=\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z-1}\,dz-\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}\,dz-\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^2}\,dz$$

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}$$

$$=2\pi i\left[\cos 1-\cos 0-(\cos z)'\big|_{z=0}\right]=2\pi i(\cos 1-1)$$

$$\left(f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\,dz\right)$$