

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \text{ so } z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ and}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{r^2} \cdot r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \quad \text{so}$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$(*) \text{ n} \in \mathbb{Z}, \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin^k \theta \cos^{n-k} \theta = \cos(n\theta)$$

even n

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2r} (-1)^r \sin^{2r} \theta \cos^{n-2r} \theta = \cos(n\theta)$$

odd n

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2r+1} (-1)^r \sin^{2r+1} \theta \cos^{n-2r-1} \theta = \sin(n\theta)$$

even n

$$z^n = a \quad \text{with } n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad a = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$r = \sqrt[n]{\rho} > 0 \quad \text{so} \quad r^n = \rho$$

$$n\theta = \alpha + 2\pi k$$

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \quad k=0, 1, \dots, n-1$$

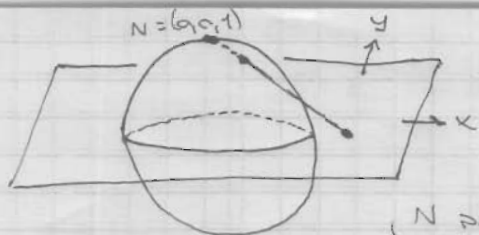
$$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right) \quad k=0, 1, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\rho} (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right) \quad k=0, 1, \dots, n-1$$



$$w_n^n = 1 \quad \text{so} \quad z_k = z_0 \cdot w_n^k \quad \text{so}$$

$$\{z \mid z^n = 1\} = \{1, w_n, w_n^2, \dots, w_n^{n-1}\}$$



$$\mathbb{C} \approx S^2 \setminus \{N\}$$

$$: \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2 \text{ map}$$

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

N היא הנקודה הצפונית של כדור הארץ. x, y - קואורדינטות רוחביות.

z - קואורדינטה רוחבית, z=1 היא הקוטב הצפוני.

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} S^2 \setminus \{N\} : \text{המקבילית הצפונית של כדור הארץ היא המקבילית הצפונית של כדור הארץ}$$

$$(x, y \in \mathbb{R}) \quad z = x + yi, \quad z \in \mathbb{C} \quad S: \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$$

$$z \mapsto (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad l(t) = z + t(N - z)$$

: N היא הנקודה הצפונית של כדור הארץ

$$= (x, y, 0) + t(-x, -y, 1) = (x(1-t), y(1-t), t)$$

$$x^2(1-t)^2 + y^2(1-t)^2 + t^2 = 1$$

: S^2 היא כדור הארץ

$$(1-t)^2(x^2 + y^2) = 1 - t^2$$

$$|z|^2 = \frac{1-t^2}{(1-t)^2} = \frac{1+t}{1-t}$$

$$l(1) = N \quad \text{כאשר } t=1 \quad \text{אז}$$

$$: t \neq 1 \quad \text{אז}$$

$$|z|^2 - t|z|^2 = 1 - t^2 \Rightarrow t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

$$S(z) = \left(x \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), y \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

$$= \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

$$z = x + yi \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}(z) & 2\operatorname{Im}(z) & |z|^2 - 1 \\ |z|^2 + 1 & |z|^2 + 1 & |z|^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 + y^2 + 1 & x^2 + y^2 + 1 & x^2 + y^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$: S^{-1} \text{ היא ההפכה}$$

$$(V \neq N) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \text{אז } V = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$(x(1-t), y(1-t), t) = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{אז } S(z) = V \quad \text{אז } z = (x, y, 0) \quad \text{אז}$$

$$y(1-x_3) = x_2, \quad x(1-x_3) = x_1, \quad t = x_3$$

$$y = \frac{x_2}{1-x_3}, \quad x = \frac{x_1}{1-x_3} \quad \text{אז } x_3 \neq 1 \quad \text{אז } V \neq N \quad \text{אז}$$

$$\Rightarrow S^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

$$\lim_{V \rightarrow N} |S^{-1}(V)| = \infty \quad (2)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} S(z) = N \quad (1)$$