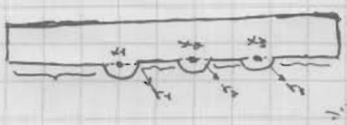
מרוכבות - שיעור 28 21/01/10

משפט: יהי $R(x)$ פונ' רציונלית שקטביה על הישר הם פשוטים, וכן מקיימת תנאי ... מהמשפט הקודם. אז

$$\boxed{pv\left(\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}dx\right) = 2\pi i\left[\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Res}_{z=z_j}\left(R(z)e^{iaz}\right)+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\operatorname{Res}_{z=x_l}\left(R(z)e^{iaz}\right)\right]}$$

כאשר $z_1,\dots,z_N$ הם הקטבים בחצי המישור העליון של $R(z)$, ו- $x_1,\dots,x_L$ הם הקטבים על הישר.



הוכחה: נסתכל בצורה הבאה, שעוקפת את הקטבים:

האינטגרל במסילה זו סוכם הקטבים בחצי העליון, ובגבול נקבל את האינטגרל על הישר שהוא סכום האינטגרלים:

$$\int_{-\infty}^{x_1-r_1}+\int_{x_1+r_1}^{x_2-r_2}+\int_{x_2+r_2}^{x_3-r_3}+\int_{x_3+r_3}^{\infty}.$$

- שים לב כי כל הקטבים המתאימים הם אלו של $\cos(ax)$, וזה שלהם גם של $\sin(ax)$.

ואז מתקיים ש $pv\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos(ax)dx = Re\left[2\pi i\left(\sum_{z=z_j}\operatorname{Res}+\frac12\sum_{x=x_l}\operatorname{Res}\right)\right]$ וגם $pv\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin(ax)dx=Im[\,''\,]$

דוגמא: חשב את $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. אז $R(x)=\frac1x$ ולכן $\frac12\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac12 Im\left[2\pi i\cdot\frac12\operatorname{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{z}\right]=\frac{\pi}{2}$ ($e^{i0}=1$)

דוגמא: נחשב: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi x)}{x^5-x}dx$. אז $R(x)=\frac{1}{x(x^4-1)}$, והקטבים הם $0,\pm1,\pm i$.

i הוא קוטב בחצי המישור העליון, ו- $0,\pm1$ קטבים על הישר. ($-i$ לא נכלל כי הוא בחצי התחתון)

ולכן

$$\Rightarrow Im\left[2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=i}+\frac12\operatorname{Res}_{z=1}+\frac12\operatorname{Res}_{z=-1}+\frac12\operatorname{Res}_{z=0}\right)\right]$$

ואז נחשב:

$$\operatorname{Res}_{z=i}\frac{e^{i\pi z}}{z^5-z}=\left.\frac{(z-i)e^{i\pi z}}{z^5-z}\right|_{z=i}=\frac{e^{-\pi}}{i\cdot(-2)\cdot 2i}=\frac{e^{-\pi}}{4}$$

$$\operatorname{Res}_{z=0}\frac{e^{i\pi z}}{z^5-z}=\left.\frac{e^{i\pi z}}{z^4-1}\right|_{z=0}=-1$$

, ושאר החישובים ......

תרגיל: $f(z)$ אנליטית בקבוצה פתוחה U, ו- $D\subseteq U$ תחום חסום כך ש- $\bar{D}\subseteq U$.

נניח $|f(z)|$ קבועה על ∂D. הוכח כי יש $z_0\in D$ כך ש- $f(z_0)=0$ (אפס).

פתרון:

נניח $|f(z)|=c$ על ∂D כאשר $c>0$ (כי אם $c=0$ אז מעקרון המקסימום $f\equiv 0$ ואז סיימנו) [כי קבועה]

אז מעקרון המקסימום: $|f(z)|<c$ לכל $z\in D$. נניח בשלילה, אם $f(z)\neq 0$ לכל $z\in D$,

אז $\frac{1}{f(z)}$ אנליטית ב-D וגם $\left|\frac{1}{f(z)}\right|=\frac1c$ על ∂D.

מעקרון המקסימום: $\left|\frac{1}{f(z)}\right|<\frac1c$ לכל $z\in D$, ולכן $|f(z)|>c$ לכל $z\in D$ - סתירה. ⊗

תרגיל: $f(z)$ שלמה, $\operatorname{Re} F(z) \geq 0$ לכל z, הוכח כי f קבועה.

פתרון:

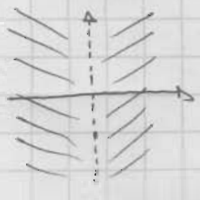
$e^{-f(z)}$ שלמה. $|e^{-f(z)}| = e^{-\operatorname{Re} f(z)} \leq 1$ ולכן ממשפט ליוביל: $e^{-f(z)} = c$ קבועה.
(כיוון f שלמה)

נניח $\arg(c) = \theta_0 + 2\pi n$. אז $-f(z) = \log|c| + i\theta_0 + 2\pi i \cdot n_z$ ולכן $f(z) = \underbrace{-\log|c| - i\theta_0}_{a_0} - 2\pi i \cdot n_z$

$\operatorname{Image}(f) \subseteq a_0 + 2\pi i \mathbb{Z}$ קשירה. כיוון שתמונת f קשירה, נקבל שהיא רק נקודה אחת.

לכן $f(z) =$ קבוע. ∎

תרגיל: F שלמה, ונניח כי $\operatorname{Re} F(z) \neq 0$ לכל z. הוכח כי F קבועה.



פתרון:

כיוון שתמונת F קשירה, היא חייבת להיות בתוך אחד מ-2 המישורים הפתוחים.
(ממשפט פיקרד)

אז $\operatorname{Re}(w) > 0$ או $\operatorname{Re}(w) < 0$. ∎

תרגיל: $U \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $f: U \to \mathbb{C}$ פונקציה. נניח כי $g(z) = f(z)^2$ ו- $h(z) = f(z)^3$ פונקציות אנליטיות ב-U. הוכח כי f אנליטית ב-U.

פתרון:

אם אין אפסים ל-$f(z)$ בתחום, אז בוודאי אפס ל-$g(z), h(z)$ אין, ואז $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ אנליטית בתחום כמנה של אנליטיות (=מכנה לא מתאפס).

נניח אם כן כי $z_0 \in U$ הוא אפס של $g(z)$ (ולכן גם של $h(z)$ כי הן חזקות של אותה פונקציה)

כיוון ש-z_0 הוא אפס מסדר סופי של g ושל h, אז:

$g(z) = (z - z_0)^m g_1(z)$ ו- $h(z) = (z - z_0)^n h_1(z)$ כאשר g_1, h_1 אנליטיות ב-U ואינן מתאפסות ב-z_0.

נקבל: $g(z)^3 = f(z)^6 = h(z)^2$ ואז $(z - z_0)^{3m} g_1(z)^3 = (z - z_0)^{2n} h_1(z)^2$

$z = z_0$ אפס מסדר $3m$ — מסדר $2n$

ואז $3m = 2n$, כלומר $n = \frac{3}{2} m > m$.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{\overset{\geq 1}{n - m}} \cdot \frac{h_1(z)}{g_1(z)}$$

מסדר חיובי ב-z_0

מנה של שתי פונ' אנליטיות שאינן מתאפסות ב-z_0

$\Leftarrow$ z_0 נק' סליקה של $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, ולכן f אנליטית בה.

ולכן f אנליטית בכל התחום. ∎