26/10/09

פונקציות מרוכבות 1' - תרגול 1

[illegible]

virtual

trinomi@gmail.com

שעת קבלה: יום ג', 15. [illegible], חדר 6.

תכונות מספרים מרוכבים

תרגיל 1: כיצד פותרים משוואה ריבועית ב-$\mathbb{C}$?

$az^2+bz+c=0 \qquad a\neq 0,\ a,b,c\in\mathbb{C}$

תזכורת:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0$$

$$z^2+\frac{b}{a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

איך מוצאים שורש של מספר מרוכב?

דרך I (אלגברית):

$$(x+iy)^2=\overbrace{u+iv}^{z}$$

$$x^2+2xyi-y^2=u+iv \Rightarrow \begin{cases}x^2-y^2=u\\ 2xy=v\end{cases}$$

אם $v=0$ יש 2 אפשרויות: • אם $u\geq 0$, $y=0$ $\Leftarrow$ $x=\pm\sqrt{u}$

• אם $u\leq 0$, $x=0$ $\Leftarrow$ $y=\pm\sqrt{-u}$

אחרת, מ-II נקבל $y=\frac{v}{2x}$.

נציב:

$$x^2-\left(\frac{v}{2x}\right)^2=u \Rightarrow 4x^4-v^2=u\cdot 4x^2$$

$$4x^4-4u\cdot x^2-v^2=0$$

יש רק שורש אחד חיובי מתוך שני השורשים, ולכן ניקח את החיובי.

$$x_{1,2}^2=\frac{4u\pm\sqrt{16u^2+16v^2}}{8}=\frac{u\pm\sqrt{u^2+v^2}}{2}=\frac{u\pm|u+iv|}{2}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}}$$

$$y=\frac{v}{2x}=\pm\frac{v}{\sqrt{2(u+|u+iv|)}}$$

דרך II (קוטבית):

$$z^2=u+iv=\rho\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z=\pm\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

יזכור:

$$\begin{cases}\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\\ \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\end{cases}$$

דוגמה:

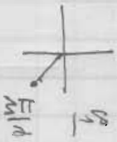
$$z^2-3z+(3+i)=0$$

$$z_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4(3+i)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-3-4i}}{2}$$

$$r=\sqrt{3^2+4^2}=5 \rightarrow -3-4i=5\left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\rightarrow \cos\theta=-\frac{3}{5}$$

$$\sqrt{-3-4i} = \pm\sqrt{5}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

לפי הרביע $\pm\sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \pm\sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$



כי $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} < \frac{\varphi}{2} < \frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 \pm (-1+2i)\right) \quad \begin{matrix} \nearrow 1+i \\ \searrow 2-i \end{matrix}$$

תיאור העתקות במישור

תרגיל:

תארו סיבוב ב-$90°$ (נגד כיוון השעון) סביב הנק' $5+2i$.

פתרון:

סיבוב סביב 0 בזווית $\frac{\pi}{2}$ זה $z \mapsto iz$ (כפל ב- $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ כופל את האורך ב-r ומסובב בזווית φ)

נזכור ש- $|zw| = |z|\cdot|w|$, $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

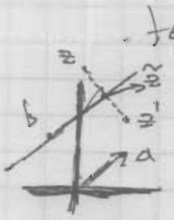
צריך למצוא $z \mapsto z'$ כך ש- $z' - (5+2i) = i(z - (5+2i))$

$$\leftarrow z' = iz + 7 - 3i$$

$$\begin{pmatrix} i(x+iy)+7-3i \\ -y+7+i(x-3) \\ \Downarrow \\ (x,y) \mapsto (-y+7, x-3) \end{pmatrix}$$

תרגיל:

תארו שיקוף של מספר מרוכב z ביחס לישר $t\cdot a + b$ כאשר $a,b \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$.



פתרון:

נמצא את נק' החיתוך של הישר עם האנך מ-z:

$$\tilde{z} = \tilde{t}\cdot a + b$$

וכיוון שהוא אנך: $\qquad \mathrm{Re}\left[(z - \tilde{z})\cdot\bar{a}\right] = 0$

נציב ונקבל את המשוואה: $\qquad \mathrm{Re}\left[(z - \tilde{t}a - b)\cdot\bar{a}\right] = 0$

$$\mathrm{Re}\left[(z-b)\cdot\bar{a} - \underbrace{\tilde{t}\cdot|a|^2}_{\text{ממשי}}\right] = 0$$

$$\mathrm{Re}\left[(z-b)\bar{a}\right] = \tilde{t}\cdot|a|^2 \Rightarrow \tilde{t} = \frac{\mathrm{Re}\left[(z-b)\bar{a}\right]}{|a|^2} = \mathrm{Re}\left[\frac{z-b}{a}\right]$$

$$\Rightarrow \tilde{z} = \mathrm{Re}\left[\frac{z-b}{a}\right]\cdot a + b$$

כלומר: $\qquad \tilde{z} = \frac{z+z'}{2} \Rightarrow z' = 2\tilde{z} - z = 2\mathrm{Re}\left[\frac{z-b}{a}\right]\cdot a + 2b - z$

נשתמש ב- $\mathrm{Re}[z] = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ונקבל:

$$\left[\frac{z-b}{a} + \frac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{a}}\right]\cdot a + 2b - z \Rightarrow \cancel{z} - b + \frac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{a}}\cdot a + 2b - \cancel{z}$$

לכן $\qquad z \mapsto b + (\bar{z} - \bar{b})\cdot\frac{a^2}{|a|^2}$