

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad (1)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = z \quad (6)$$

$$z \in \mathbb{R} : \Leftrightarrow \bar{z} = z$$

$$11011 = Z \quad (4)$$

$$z \cdot \bar{z} \geq 0 \quad (7)$$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \begin{matrix} \text{Se } \operatorname{Im} z = \\ \text{proyeksi } z \end{matrix}$$

: Def 1 se $z = a + bi$ A+I

$$(|z| = \sqrt{2} = |a| \quad \text{et} \quad z = a \in R \text{ ou } i)$$

Ans: (verin and -niss)

$$220 \Rightarrow 12120 \quad 011521 \quad 12120 \quad (1)$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad (2)$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \quad (3)$$

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \leq |z| \quad (4)$$

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (5)$$

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow |z_1 z_2|^2 = (|z_1| |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \square$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + |z_2|^2 \quad (3)$$

$$= |z_1|^2 + \underbrace{2z_1\bar{z}_2 + \overline{(z_1\bar{z}_2)}}_{\substack{\text{Real} \\ \text{part}}} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$$

(4) 9/6/20 : 885 Se eden 5/17/20

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| = |\operatorname{Re}(z)|$$

$$\|V\|_{\mathcal{H}^2} = \|V\| = \|P_n(z)\|$$

$$\underbrace{|z_1 + z_2|^2}_{(8)} = \underbrace{|z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)}_{(5)} + \underbrace{|z_2|^2}_{(6)} \leq \underbrace{|z_1|^2 + 2|z_1||z_2|}_{(7)} + |z_2|^2$$

$$(z_1 = t \cdot z_2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|) \quad \text{: מידות}$$

$0 \leq a$ הוא $\Leftrightarrow$ a הוא מספר ממשי z_1, z_2 הם $\Leftrightarrow$ $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ אם ורק אם z_1, z_2 הם אותו הכיוון

הוכחה:

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1| |z_2| \quad \text{אם ורק אם } |z_1| |z_2| = \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \quad \text{: מידות}$$

$$(z_1 = a + bi, z_2 = c + di) \quad \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1| |z_2| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1| |z_2| \quad \text{: מידות}$$

$$z_1 \bar{z}_2 \geq 0 \quad \text{אם ורק אם } z_1, z_2 \text{ הם אותו הכיוון}$$

$$\text{אם } z_1 = 0 \text{ אז } z_2 = 0 \text{ או } z_2 \neq 0 \text{ אז } z_1 \bar{z}_2 = 0$$

$$z_1 \bar{z}_2 > 0 \text{ אז } z_2 \neq 0 \text{ אז } z_1 \bar{z}_2 > 0$$

$$(t \geq 0 \text{ אז } t = \frac{z_1}{z_2} \text{ אז } z_1 = t \cdot z_2) \quad \frac{z_1}{z_2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \geq 0 \quad \text{אם ורק אם } z_1 \bar{z}_2 \geq 0$$

מידות:

$$\forall z_1, z_2, \dots, z_n \quad |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

מידות $\Leftrightarrow$ $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$ אם ורק אם $z_1, z_2, \dots, z_n$ הם אותו הכיוון

הוכחה:

$$0 \leq \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1| |z_2| \quad \text{אם ורק אם } z_1, z_2 \text{ הם אותו הכיוון}$$

$$|z_1| + \dots + |z_n| = |z_1 + \dots + z_n| = |(z_1 + z_2) + z_3 + \dots + z_n| \quad \text{מידות}$$

$$\leq |z_1 + z_2| + |z_3| + \dots + |z_n|$$

$$\leq (|z_1| + |z_2|) + |z_3| + \dots + |z_n|$$

$$|z_1 + z_2| + |z_3| + \dots + |z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \quad \text{מידות}$$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \quad \text{מידות}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2} > 0 \right) \quad \text{אם ורק אם } z_1, z_2 \text{ הם אותו הכיוון}$$

מידות:

מידות $\Leftrightarrow$ $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$ אם ורק אם $z_1, z_2, \dots, z_n$ הם אותו הכיוון

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1 (1 + \frac{z_2}{z_1} + \dots + \frac{z_n}{z_1})| = |z_1| \cdot |1 + \frac{z_2}{z_1} + \dots + \frac{z_n}{z_1}|$$

$$= |z_1| \cdot \left(1 + \frac{|z_2|}{|z_1|} + \dots + \frac{|z_n|}{|z_1|} \right) = |z_1| \cdot \left(1 + \frac{|z_2|}{|z_1|} + \dots + \frac{|z_n|}{|z_1|} \right) = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

מידות:

$$|z_1 - z_2| = |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| \quad \text{מידות}$$

$$= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

$$|z_1 - z_2| = \text{המרחק בין } z_1 \text{ ל-} z_2 \quad \text{מידות}$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) : \mathbb{R}^2 \text{ ומהנה } z_2, z_1 \text{ זהו הסקלר המשותף (2)}$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)$$

$$z_1 \bar{z}_2 \neq 0 \text{ אז } \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \neq 0 \quad (3)$$

ש"ל

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)}{|z_1 z_2|}$$

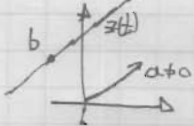
$\mathbb{R}^2$ זהו הסקלר המשותף $z_2 \neq 0$ אז $|z_2| \neq 0$

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0 \iff \text{הם שונים } \perp$$

$$(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0 \iff) \quad z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R} \cdot i \iff$$

ד"ר זה

הם שונים (כלומר הם שונים) $a \neq 0 \in \mathbb{C}$ זהו הסקלר המשותף



$$t \in \mathbb{R} \implies z(t) = a \cdot t + b$$

הם שונים $b \in \mathbb{C}$ זהו הסקלר המשותף

$$b_1, b_2 \in \mathbb{R}, b = b_1 + b_2 i \text{ אז } a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a = a_1 + a_2 i \text{ זהו הסקלר המשותף}$$

$$x, y \in \mathbb{R}, z(t) = x + yi \text{ אז } a \neq 0 \text{ זהו הסקלר המשותף}$$

$$(a_1 + a_2 i)t + b_1 + b_2 i = x + yi$$

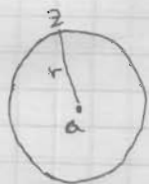
$$(a_1 t + b_1) + (a_2 t + b_2)i = x + yi \implies \begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \end{cases}$$

$$x = a_1 \frac{y - b_2}{a_2} + b_1 \iff t = \frac{y - b_2}{a_2}$$

$$a_2 x = a_1 y - a_1 b_2 + a_2 b_1$$

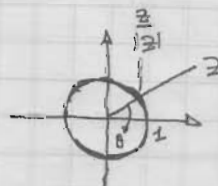
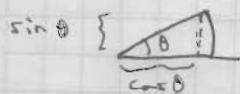
$$a_2 x - a_1 y = a_2 b_1 - a_1 b_2$$

זהו הסקלר המשותף x, y זהו הסקלר המשותף



$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\} : 0 < r \text{ זהו הסקלר המשותף } a \in \mathbb{C}$$

$$\frac{|z|}{|z|} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$



$$\frac{z}{r} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$r = |z|$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\frac{z}{r} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$(z \neq 0 \text{ אז } r \neq 0 \text{ אז } \theta \text{ זהו הסקלר המשותף})$$

הם שונים (כלומר הם שונים) $\theta \in [0, 2\pi)$ זהו הסקלר המשותף $\theta \in [0, 2\pi)$ זהו הסקלר המשותף

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ אז } (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \text{ זהו הסקלר המשותף}$$

$$\theta = \arg(z) (= \theta + 2\pi k)$$

ש"ל

הקשר בין z_1 ו- z_2 :

הקשר בין z_1 ו- z_2 : $\theta = \text{const}$

הקשר בין z_1 ו- z_2 : $r = \text{const}$

הקשר בין z_1 ו- z_2 :

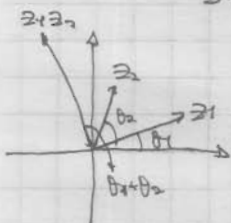
שה $(k=1,2)$ $z_k = r_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\underbrace{|z_1| |z_2|}_{|z_1 z_2|} = |z_1 z_2|$$

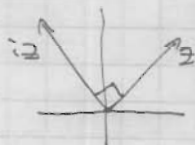


הקשר בין z_1 ו- z_2 : $\cos \theta + i \sin \theta$ - הקשר בין z_1 ו- z_2

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

הקשר בין z_1 ו- z_2 : $z \mapsto iz$ - הקשר בין z_1 ו- z_2

$$(x, y) \mapsto (-y, x) \Rightarrow (x + yi)i = -y + xi$$



הקשר בין z_1 ו- z_2 :

$$z \mapsto \frac{z}{\sqrt{2}} (1+i) \quad \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x + yi)(1+i) = \frac{x-y}{\sqrt{2}} + \frac{x+y}{\sqrt{2}} i$$