שיעור 14 - מרוכבות

10/01/10

משפט: (Roucé)

U תחום, f,g פונקציות אנליטיות ב-U, $\gamma \subseteq U$ מסילה כך ש- $n(\gamma,a)=0 \ \forall a\notin U$,
[וגם $n(\gamma,z)\in\{0,1\}$]
ונניח ש- $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ לכל $z\in\gamma$.

אז ל-γ מקיפה אותו מספר של אפסים (כולל ריבוי) עבור f ועבור g.

תזכורת - עקרון הארגומנט:

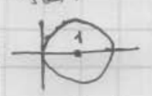
אם f מרומורפית ב-U עם אפסים $z_1,\dots,z_n$ וקטבים $p_1,\dots,p_m$. γ מסילה סגורה ב-U
[ספורים עם ריבוי לפי הסדר] (והקטבים והאפסים אינם על γ)
כך ש- $\forall a\notin U.\ n(\gamma,a)=0$, אז מתקיים:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma,z_j) - \sum_{k=1}^{m} n(\gamma,p_k)}$$

הוכחת משפט רושה:

נשים לב, אין אפסים (של f ושל g) על γ. [כי $f(z)\neq 0$ וגם $g(z)\neq 0$ על המסילה] בנוסף הנתון שקול ל- $\left|1-\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ על γ

$\Longleftarrow$ $F(z)=\frac{g(z)}{f(z)}$ מעבירה את γ לתוך עיגול ברדיוס 1 סביב $z_0=1$.



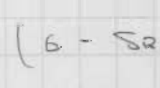
לכן מוגדר $\operatorname{Log}\frac{g(z)}{f(z)}$, וזוהי פונקציה קדומה של $\frac{\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)'}{\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)}$.

לכן $0 = \int_\gamma \frac{\left(\frac{g}{f}\right)'}{\left(\frac{g}{f}\right)}dz = \int_\gamma \left(\frac{g'}{g}(z) - \frac{f'}{f}(z)\right)dz$ ולכן $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{g'}{g}$, ומעקרון הארגומנט נקבל

ש-γ מקיפה אותו מספר אפסים עבור f ו-g: $\sum n(\gamma,z_j^f) = \sum n(\gamma,z_j^g)$. ∎

דוגמא: כמה פתרונות יש למשוואה $z^7-2z^5+6z^3-z+1=0$ בתוך עיגול היחידה $\{|z|<1\}$?

פתרון:



נבחר $g(z)=6z^3$ (ניקח את החזקה עם המקדם הגדול ביותר, כדי שיהיה הכי קרוב ל-$f(z)$
ונשים לב כי $|z|=1$ על המסילה, ולכן החזקה הכי גדולה היא זו עם המקדם הכי גדול - 6)

נראה שעל המסילה $\{|z|=1\}$ מתקיים בנוסף ש: $|f-g| = |z^7-2z^5-z+1| \le 1+2+1+1 = 5$

$|g| = |6z^3| = 6$ (על $|z|=1$) $\Longrightarrow$ ולכן מתקיים $|f-g|<|g|$ על γ

ולכן ל-f יש אותו מספר אפסים כמו g בעיגול $\{|z|<1\}$, וזה 3.
(ל- $6z^3$ - יש אפס $z=0$, וזה מריבוי 3)

נושא: סוגי - $\int_0^\infty x^a R(x)\,dx$.

$R(x) =$ פונקציה רציונלית ממשית, ללא קטבים על $(0,\infty)$,

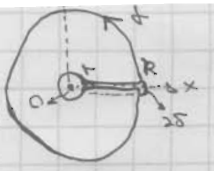
כמו כן: $\lim_{x\to\infty}(x^{a+1}R(x)) = \lim_{x\to 0^+}(x^{a+1}R(x)) = 0$

(הערה: המקרה המעניין הוא $a\notin\mathbb{Z}$ כי אחרת [illegible] x^a ו-$R(x)$)

נוסחה:

$$\boxed{\int_0^\infty x^a R(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}}\cdot\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}_{z=z_j}\left(z^a R(z)\right)}$$

קטבים של R



ניקח γ כמו בציור משמאל. R מספיק גדול, r מספיק קטן כך ש-γ מקיפה את כל

הקטבים של $z^aR(z)$ (פרט לאפס), ולכן משפט השארית:
[נסמן $z_1,\dots,z_k$]

$$\int_\gamma z^aR(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=z_j}\left(z^aR(z)\right)$$

נראה שהאינטגרלים על הקשתות (ברדיוסים R, r) הם זניחים:

$$z=Re^{it} \qquad t:\alpha_\delta\to 2\pi-\alpha_\delta$$

$$\left|\int_{R\text{-arc}}\right| = \left|\int_{\alpha_\delta}^{2\pi-\alpha_\delta} R^a\cdot e^{iat}\cdot R(R\cdot e^{it})\cdot iR\cdot e^{it}\,dt\right| \underset{R>R_\varepsilon}{\leq} (2\pi-2\alpha_\delta)\cdot\varepsilon$$

(יהי $\varepsilon>0$, ויהי R_ε כך ש-$R>R_\varepsilon$: $|R^{a+1}\cdot R(R\cdot e^{it})|<\varepsilon$)

ובדומה עבור הקשת הקטנה ברדיוס r ($r<r_\varepsilon$).

*למה: $\displaystyle\lim_{\delta\to0^+}\int_0^\infty (x+i\delta)^aR(x+i\delta)\,dx = \int_0^\infty x^aR(x)\,dx$ (ללא הוכחה, משפט לבג)
($\delta>0$)

מצד שני, בהתחשב בענף: ($\delta>0$)

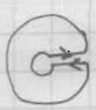
$$(x-i\delta)^aR(x-i\delta) = e^{a\overbrace{(\log|x-i\delta|+i\cdot\arg(x-i\delta))}^{\to 2\pi}}\cdot R(x-i\delta)$$

$$= x^a\cdot e^{2\pi i a}\cdot R(x)$$

$\delta\to0$, $\log|x|$, $R(x-i\delta)$, log של ... $0<\arg<2\pi$

ולכן מהלמה *:

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_0^\infty (x-i\delta)^aR(x-i\delta)\,dx = e^{2\pi i a}\int_0^\infty x^aR(x)\,dx$$



לסיכום,

$$(1-e^{2\pi i a})\int_0^\infty x^aR(x)\,dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}_{z=z_j}\left(z^aR(z)\right)$$

אם נחלק בקבוע משמאל נקבל הנדרש. ☒