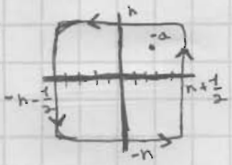
מרוכבות - שיעור 27

19/01/10

שימושים ← חישוב טורים

דוגמה: נחשב את $\displaystyle\int_{\gamma_n} \overbrace{\frac{\cot(\pi z)}{(z+a)^2}}^{F(z)}\,dz$ על המסילה γ_n :



פתרון: לפי משפט השאריות:

$$\int_{\gamma_n} F(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\text{נקודות סינג'}} \mathrm{Res}(F(z))$$

וגם:

$$\mathrm{Res}_{z=k} \frac{\cot(\pi z)}{(z+a)^2} = \frac{1}{\pi(k+a)^2}$$

$$\mathrm{Res}_{z=-a} \frac{\cot(\pi z)}{(z+a)^2} = (\cot(\pi z))'\Big|_{z=-a} = -\frac{\pi}{\sin^2(\pi a)}$$

לכן נקבל:

$$\circledast\quad \int_{\gamma_n} F(z)\,dz = 2\pi i\left(\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\pi(k+a)^2} - \frac{\pi}{\sin^2(\pi a)}\right) = 2i\left(\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(k+a)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}\right)$$

נראה כי עבור $n\to\infty$ האינטגרל $\to 0$.

$$\left|\int_{\gamma_n} \frac{\cot(\pi z)}{(z+a)^2}\,dz\right| \le (8n+2)\cdot \max_{z\in\gamma_n} \frac{|\cot(\pi z)|}{|z+a|^2} \underset{\downarrow}{\le} (8n+2)\cdot\frac{\max_{\gamma_n}|\cot(\pi z)|}{(n-a)^2}$$

$|z+a|\ge|z|-a\ge n-a$

על γ_n מתקיים ש- $|z|\ge n$

נראה כי $\cot(\pi z)$ חסום על γ_n (עבור $n\to\infty$):

$$|\cot(\pi z)| = \left|\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right| = \left|\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}\right| = \left|\frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1}\right|$$

עבור $z=\pm(n+\frac{1}{2})+it$, $-n\le t\le n$ ...... $\Leftarrow$ חסום!

עבור $z=t\pm in$, $-n-\frac{1}{2}\le t\le n+\frac{1}{2}$, אז $2\pi i z = 2\pi i t \mp 2\pi n$,

ולכן $e^{2\pi i z} = e^{2\pi i t}\cdot e^{\mp 2\pi n}$ ואז $\left|\dfrac{e^{2\pi i t}\cdot e^{\mp 2\pi n}+1}{e^{2\pi i t}\cdot e^{\mp 2\pi n}-1}\right|$ חסום גם!

$\Leftarrow$ סה"כ חסום. ולכן $\displaystyle\int_{\gamma_n} F(z)\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\circledast$

$\Leftarrow$ $\displaystyle 0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2\pi a}$ ונקבל

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}}$$

מסקנה: נציב $a=\frac{1}{2}$ ונקבל $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} = \pi^2$ ואז $\displaystyle 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{\text{סימטריה}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$

ולכן $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$.

ובנוסף השוויון הנ"ל, נקבל גם:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}}_{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}}_{\frac{\pi^2}{8}}$$

ולכן $\displaystyle\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$

ולכן

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

אינטגרלים מהצורה: $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\,dt$:

$R(x,y)$ = פונקציה רציונלית בשני משתנים x,y . נכתוב את האינטגרל כאינטגרל מסילתי על

מעגל היחידה: $z=z(t)=e^{it}=\cos t+i\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$, $dz=ie^{it}dt=iz\,dt$.

$\left(=\frac{1}{2}(z+\bar z)\ ,\ |z|=1\right)$ $\cos(t)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $\sin(t)=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$.

ואז

$$\boxed{\int_{|z|=1} R\left(\tfrac{1}{2}(z+\tfrac{1}{z}),\ \tfrac{1}{2i}(z-\tfrac{1}{z})\right)\frac{dz}{iz} \underset{\text{משפט השאריות}}{=} 2\pi i\cdot\sum_{\text{סינג'}}\left(\text{שאריות בתוך מעגל היחידה}\right)}$$

תרגיל:

$$(a>b>0)\quad \int_0^{\pi}\frac{dt}{a+b\cos(t)} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+b\cos(t)} = \frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)} \ominus$$

נקבל כי:

$$z\left(a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = az+\frac{b}{2}(z^2+1) = \frac{b}{2}z^2+az+\frac{b}{2}$$

לכן

$$\ominus\ \frac{1}{i}\int_0^{2\pi}\frac{dz}{bz^2+2az+b} \ \textcircled{=}$$

שורשים:

$$\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4b^2}}{2b} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

$$\alpha-\beta=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b} \ . \qquad \alpha=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\ ,\quad \beta=\frac{1}{\alpha}=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\ .$$

ו-

$$|\alpha|=\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}<1\ ,\qquad |\beta|=\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}>\frac{a}{b}>1\ .$$

לכן

$$\textcircled{=}\ \frac{1}{i}2\pi i\cdot\underset{z=\alpha}{\mathrm{Res}}\ \frac{1}{b(z-\alpha)(z-\beta)} \underset{\uparrow}{=} 2\pi\cdot\frac{1}{b(\alpha-\beta)} = \frac{2\pi}{b\cdot\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

קוטב פשוט ב-$z=\alpha$

אינטגרלים מהצורה: $(a\geq 0)$ $\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin(ax)\,dx\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos(ax)\,dx$:

$R(x)=$ פונקציה רציונלית (מנה של פולינומים ב-x) כך שמעלת המונה קטנה ממעלת המכנה לפחות ב-2,

וכן ל-$R(z)$ אין קטבים על הציר הממשי (המכנה אינו מתאפס עבור x ממשי).

נתבונן בפונקציה המרוכבת $R(z)e^{iaz}$ והמסילה: $\gamma=\gamma_r$:  (r גדול מספיק)

נניח כי $z_1,\dots,z_N$ הם כל הקטבים של $R(z)$ בחצי המישור העליון. נניח כי r גדול די.

אז

$$\int_{-r}^{r}R(x)e^{iax}\,dx+\int_0^{\pi}R(re^{it})e^{iare^{it}}\cdot ire^{it}\,dt = \int_{\gamma}R(z)e^{iaz}\,dz = 2\pi i\sum_{\substack{z=z_j\\1\leq j\leq N}}\mathrm{Res}\left(R(z)e^{iaz}\right)$$

נראה:

$$\left|\text{האינטגרל השני}\right| \leq \pi r\cdot\max_{0\leq t\leq\pi}\left(|R(re^{it})|\cdot e^{\mathrm{Re}(iare^{it})}\right) = \pi r\cdot\max_{0\leq t\leq\pi}|R(re^{it})|\,e^{\overbrace{-ar\sin t}^{\leq 0\ (0\leq t\leq\pi\text{ כי})}} \leq \pi r\cdot\max_{0\leq t\leq\pi}|R(re^{it})| \leq$$

$$\leq M\pi r^{-1}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$$

מהנחה על R, יש $r_0>0$ ו-$M>0$ כך שלכל $|z|\geq r_0$ מתקיים $|R(z)|\leq M\cdot|z|^{-2}$. לכן אם $r\geq r_0$, אז $|R(re^{it})|\leq Mr^{-2}$

אם האינטגרל השני $\to 0$ כאשר $r\to\infty$, והאינטגרל הראשון: $\int_{-r}^{r}R(x)e^{iax}\,dx \xrightarrow[r\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{iax}\,dx$.

לכן (אחרי השוואת חלקים ממשיים ומדומים): $(a\geq 0)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos(x)\,dx = \mathrm{Re}\left[(2\pi i)\sum_{j=1}^{N}\underset{z=z_j}{\mathrm{Res}}\left(R(z)e^{iaz}\right)\right]}\ ,\qquad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin x\,dx = \mathrm{Im}\left[(2\pi i)\sum_{j=1}^{N}\underset{z=z_j}{\mathrm{Res}}\left(R(z)e^{iaz}\right)\right]}$$

תרגיל: חשב:

$$(a\geq 0,\ b>0)\quad \int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}\,dx \quad \left(=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}\,dx\right) \longleftarrow R(x)=\frac{1}{x^2+b^2}$$

לפי הנוסחה:

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot\underset{z=ib}{\mathrm{Res}}\ \frac{e^{iaz}}{\underbrace{z^2+b^2}_{(z+ib)(z-ib)}}\right]$$

$\int R(x)\cos(x)$ כאשר פונקציה זוגית

חישוב:

$$\underset{z=ib}{\mathrm{Res}}\ \frac{e^{iaz}}{(z+ib)(z-ib)} = \frac{e^{ia(ib)}}{2ib} = \frac{e^{-ab}}{2ib}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\infty}\frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot\frac{e^{-ab}}{2ib}\right] = \frac{\pi\cdot e^{-ab}}{2b}$$

הערה:

הנוסחה לא תקפה כאשר מעלת המכנה פחות מעלת המונה של $R(x)$ היא 1 (ללא הוכחה), אבל ממשי

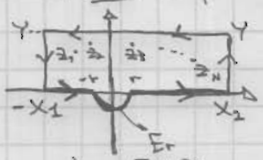
תרגיל: (a,b>0) $\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}dx = ?$ $\left(= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}dx\right)$ - כמו שראינו $R(x)=\frac{x}{x^2+b^2}$

$\operatorname*{Res}_{z=ib}\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}=\dots$

נרצה לחשב את האינטגרלים: כמו $\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin(x)\,dx$ כש- $a>0$.

$R(x)$ = פונקציה רציונלית עם מעלת המונה < מעלת המכנה (לפחות ב-1 או יותר),

ונניח כי ל-$R(z)$, כל הקטבים פשוטים, יש קוטב יחיד ב-$z=c$, ואין קוטב נוסף.



$\gamma:$ (r>0 כי קטן)

$$\int_\gamma R(z)e^{iaz}dz = 2\pi i\left[\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_j}(R(z)e^{iaz}) + \operatorname*{Res}_{z=c}(R(z)e^{iaz})\right]$$

סכום השארית קיים
לפי משפט השארית

נרצה לחשב: נשתמש בפרמטריזציה: $\int_{E_r}R(z)e^{iaz}dz = \int_{\pi}^{2\pi}R(re^{it})e^{iare^{it}}\cdot ire^{it}dt$, אבל זה לא קל, נשתמש בטור לורן כי:

$R(z)e^{iaz} = \frac{a_{-1}}{z} + f(z)$; לכן נקבל: $\int_{E_r}\frac{a_{-1}}{z}dz + \int_{E_r}f(z)dz$.

$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ אנליטית כי אין קוטב בסביבת $z=c$

$a_{-1}\cdot\int_{\pi}^{2\pi}\frac{ire^{it}}{re^{it}}dt = a_{-1}\pi\cdot i = 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=0}(R(z)e^{iaz})$

נראה כי שואף ל-0

אנליטית ולכן חסומה בסביבה של 0

$$\left|\int_{E_r}f(z)dz\right| \le \pi r\cdot\max_{z\in E_r}|f(z)| \le M\cdot r \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \implies$$

לגבי כל השאר, נשתמש בחלוקה לאינטגרלים:

האינטגרלים שנותרו: $\left(\int_{-x_1}^{-r} + \int_{r}^{x_2}\right) + \int_{x_2}^{x_2+iY} + \int_{x_2+iY}^{-x_1+iY} + \int_{-x_1+iY}^{-x_1}$

נניח ש- $|R(z)| \le M\cdot|z|^{-1}$ ל- $|z|\ge r_0$, ואז: $\overset{(1)}{\left|\int_{x_2+iY}^{-x_1+iY}\right|} \le \frac{Me^{-Y}}{Y}(x_1+x_2)$, $\overset{(2)}{\left|\int_{-x_1+iY}^{-x_1}\right|} \le \frac{M}{ax_1}$, $\overset{(3)}{\left|\int_{x_2}^{x_2+iY}\right|} \le \frac{M}{ax_2}$

ראינו, כששואף $Y\to\infty$ אז $(1)\to 0$, וכששואף $x_1,x_2\to\infty$ אז $(2),(3)\to 0$,

ולבסוף: $r\to 0$ נקבל:

$$\lim_{r\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-r}R(z)e^{iaz}dz + \int_{r}^{\infty}R(z)e^{iaz}dz\right) = 2\pi i\left[\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_j}(R(z)e^{iaz}) + \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=0}(R(z)e^{iaz})\right]$$

זה הערך הראשי, כלומר $\mathrm{pr}\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{iax}dx$ ערך ראשי.

השיעור הבא - לוגריתם מרוכב.

הגדרה: ארגומנט - מספר (אין סוף מספרים כאלה) + k כפולות, מרוכב k שלם.