מרוכבות - שיעור 18 17/12/09

תזכורת:

γ מסילה סגורה, $a\notin\gamma$. ראינו כי $n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ הוא מספר שלם

האומר את מספר הפעמים שמסילה γ מקיפה את a (winding number).

נדבר בתמונה של (תמונת) γ ב-$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. כיוון שתמונת γ סגורה, משלימה זר פתוח.

לכן זה המשלים באיחוד (זר) של מרכיבים קשירים, ואלה גם פתוחים (כי רכיב קשיר

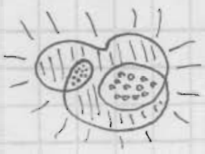
של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח). נסמן ב-L את המרכיב הקשיר של $\{\infty\}$.

מכאן $\mathbb{C}\setminus(L\setminus\{\infty\}) = (\mathbb{C}\cup\{\infty\})\setminus L$ קבוצה סגורה וחסומה. לכן גם קומפקטית (היינה בורל).

(*) $L\setminus\{\infty\}$ = המרכיב האינסופי של המשלים של γ ב-$\mathbb{C}$, כלומר קבוצה פתוחה וקשירה (=תחום)

שאר המרכיבים הקשירים של $\mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$ (=שאר המרכיבים הקשירים של $(\mathbb{C}\cup\{\infty\})\setminus\gamma$) הם תחומים

חסומים, ולכן, באופן כללי, המשלים של γ ב-$\mathbb{C}$ הוא איחוד של מרכיבים קשירים (ולכן גם תחומים) שבדיוק אחד מהם אינו חסום.



למה:

הפונקציה $a\mapsto n(\gamma,a)$ (פונקציה על $\mathbb{C}\setminus\gamma$) קבועה על כל מרכיב קשיר של $\mathbb{C}\setminus\gamma$,

והיא אפס על המרכיב האינסופי.

הוכחה:

א: U מרכיב קשיר של $\mathbb{C}\setminus\gamma$. U הוא תחום ולכן כל שתי נק' $a,b\in U$ ניתנות לחיבור

ע"י קו שבור המוכל ב-U. לכן די להראות שלכל $a,b\in U$ כך שהקטע מ-a ל-b מוכל ב-U,

ש-$n(\gamma,a)=n(\gamma,b)$. אז נניח ש $I_{a,b}=\{a+t(b-a)\mid 0\le t\le 1\}\subseteq U$ ($a,b\in U$). נראה ש:

ב-$\mathbb{C}\setminus I_{a,b}$ מוגדר $\log\frac{z-a}{z-b}$. ואז $\left(\log\frac{z-a}{z-b}\right)'=\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}$ $z\in\mathbb{C}\setminus I_{a,b}$ בתחום המכיל γ

ולכן: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz=0$ כאינטגרל של נגזרת של $\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}$

בתחום $\mathbb{C}\setminus I_{a,b}$. אם כן זה קיום אינטגרל (כי γ סגורה). ז"א $n(\gamma,a)-n(\gamma,b)=0$.

לכן רק נראה ש-Log מוגדר על נקודה כזו:

נראה כי ש-$z\in\mathbb{C}\setminus I_{a,b}$ מקיים: $\frac{z-a}{z-b}\not\le 0$. נניח בשלילה שכן, אז $\frac{z-a}{z-b}=s$, $s\in\mathbb{R}$, $s\le 0$

אז $z-a=sz-sb \Leftarrow (1-s)z=a-sb \Longleftarrow$ (מותר לחלק כי $s\ne 1$) $z=\frac{a}{1-s}-\frac{sb}{1-s}$

ולכן $z=\frac{a(1-s+s)}{1-s}-\frac{s}{1-s}b=\frac{s}{1-s}a+a-\frac{s}{1-s}b$ כלומר $z=a+\frac{s}{s-1}(b-a)$, ו-$s\le 0$

ולכן $0\le\frac{s}{s-1}<1$ ואז $z\in I_{a,b}$, בסתירה לבחירת z. לכן לא $\frac{z-a}{z-b}\le 0$.

לכן ניתן להגדיר ב-Log כמו, ולכן נקבל כנדרש.

כעת נוכיח מהמקרה האינסופי.

אם a במרכיב האינסופי, אז כיוון ש- $n(\gamma,a)$ קבוע שם אפשר לבחור כי $|a|\geq R$
ו- γ מוכלת בעיגול סגור ברדיוס R. ואז ראינו כי $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}=0$ ולכן $n(\gamma,a)=0$.

נוסחת האינטגרל של קושי

יהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D. יהי $a\in D$, אז $f(z)$ גזירה ב-a.
נתבונן ב-: $F(z)=\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$, $z\in D\setminus\{a\}$. מתקיים $\lim_{z\to a}F(z)=f'(a)$. נרצה את הרציפות
$F(z)$ גם ב- $z=a$ ע"י $F(a)=f'(a)$. אז $F(z)$ רציפה ב-D, ואנליטית ב-
$D\setminus\{a\}$ (כמנה של פונ' גזירות), ולכן ממשפט קושי המוכלל (המשופרת של גורסה)
נקבל $\int_\gamma F(z)\,dz=0$ לכל מסילה סגורה γ שהומולוגית ב-D לאפס.

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz=0 \Rightarrow \int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}dz-f(a)\int_\gamma\frac{dz}{z-a}=0 \Rightarrow \int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i\cdot n(\gamma,a)f(a)$$

נקבל את נוסחת האינטגרל של קושי:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}dz=n(\gamma,a)\cdot f(a)}$$
(אם γ מסילה סגורה הומולוגית ב-D לאפס)

סיכום

משפט: (נוסחת האינטגרל של קושי)

יהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום D. אז לכל $a\in D$ ולכל מסילה סגורה γ הומולוגית ב-D לאפס מתקיים:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}dz=n(\gamma,a)f(a)$$

תרגיל: $\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z^3+z}dz=?$ נשים לב ש- $\frac{1}{z(z+i)(z-i)}=\frac{1}{z}-\frac{1/2}{z-i}-\frac{1/2}{z+i}$

$$\Rightarrow \int_{|z|=2}\frac{\cos z}{\underbrace{z^3+z}_{z(z+i)(z-i)}}dz=\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}dz-\frac{1}{2}\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z-i}dz-\frac{1}{2}\int_{|z|=2}\frac{\cos z}{z+i}dz$$

0, i ו- $-i$ הם בתוך
המעגל 2, ולכן נוכל להשתמש
בנוסחת האינטגרל של קושי
בכל אחד מהאינטגרלים

$$=2\pi i\left[\cos 0-\frac{1}{2}\cos i-\frac{1}{2}\cos(-i)\right]$$
$$=2\pi i(1-\cos i)\underset{\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{=}2\pi i\cdot\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2}=\pi i(1-e^{-1}-e)$$