מרוכבות - שיעור 9

17/11/08

פרק ג': פונקציות אנליטיות (ומרוכבות)

הגדרה: (גזירות מרוכבת)

תהי פונקציה $f(z)$ (עם ערכים מרוכבים) המוגדרת בסביבה של a (במישור).

נאמר כי f גזירה ב-a אם קיים (סופי) $f'(a) \overset{\text{סימון}}{=} \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$

תכונות הנגזרת (כמו בממשי)

- סכום של פונקציות גזירות ב-a הוא גזיר ב-a, הנגזרת הסכום שווה לסכום הנגזרות.
- מכפלה של פונקציות גזירות ב-a היא גזירה ב-a, ויש כלל הגזירה של מכפלה.
- מנת פונקציות $\frac{f(z)}{g(z)}$ גזירות ב-a עם $g(a)\neq 0$ גזירה ב-a, ויש כלל המנה.
- הרכבה - $f(g(z))$ כאשר g גזירה ב-a ו-f גזירה ב-$g(a)$ היא גזירה ב-a, ויש כלל השרשרת.
- לצרף, גזירות ב-a $\Longrightarrow$ רציפות ב-a.

הוכחה: $f(z)-f(a) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot(z-a) \xrightarrow[z\to a]{} f'(a)\cdot\underbrace{(a-a)}_{=0}$ ולכן רציפה.

- $f(z)=z^n$, n טבעי. גזירה במישור:

$$\frac{z^n-a^n}{z-a} = z^{n-1}+z^{n-2}a+z^{n-3}a^2+\dots+a^{n-1} \xrightarrow[z\to a]{} a^{n-1}+a^{n-1}+\dots+a^{n-1} = n\cdot a^{n-1}$$

ולכן $(z^n)' = nz^{n-1}$

מסקנה: פונקציה רציונלית $\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$, $g(z)$ פולינומים - גזירה בכל נקודה שבה המכנה לא מתאפס.

הערה: נניח $f(z)=u(z)+iv(z)$ כש- $v(z)=\operatorname{Im}f(z)$, $u(z)=\operatorname{Re}f(z)$. ו- $z=\underset{\in\mathbb{R}}{x}+i\underset{\in\mathbb{R}}{y}$

נכתוב גם $u(z)=u(x,y)$, $v(z)=v(x,y)$.

נניח כי f גזירה בנק' $a=a_1+ia_2$. אז:

$$f'(a) \xleftarrow[z\to a]{} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{u(x,y)-u(a_1,a_2)+i(v(x,y)-v(a_1,a_2))}{\underbrace{(x-a_1)}_{h_1}+i\underbrace{(y-a_2)}_{h_2}}$$

$$= \frac{u(h_1+a_1,h_2+a_2)-u(a_1,a_2)+i(v(h_1+a_1,h_2+a_2)-v(a_1,a_2))}{h_1+h_2 i}$$

נשאיף $h_1+ih_2\to 0$. ונלך דרך ציר x, כלומר: $h_2=0$, $h_1\to 0$.

נקבל:
$$\frac{u(h_1+a_1,a_2)-u(a_1,a_2)}{h_1}+i\,\frac{v(h_1+a_1,a_2)-v(a_1,a_2)}{h_1}$$

נובע כי קיימים
$$\operatorname{Re} f'(z)=\lim_{h_1\to 0}\frac{u(a_1+h_1,a_2)-u(a_1,a_2)}{h_1}\ ,\quad \operatorname{Im} f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{v(a_1+h_1,a_2)-v(a_1,a_2)}{h_1}$$

ולכן קיימים $\frac{\partial u}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(a)$ ומתקיים:
$$\boxed{f'(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)}$$

אם נלך בציר $h_1=0$, $h_2\to 0$ אז נקבל:
$$\frac{u(a_1,a_2+h_2)-u(a)}{ih_2}+\cancel{i}\,\frac{v(a_1,a_2+h_2)-v(a)}{\cancel{i}h_2}=\frac{v(a_1,a_2+h_2)-v(a)}{h_2}-i\cdot\frac{u(a_1,a_2+h_2)-u(a)}{h_2}$$

נובע כי קיימים $\frac{\partial u}{\partial y}(a)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(a)$ ומתקיים:
$$\boxed{f'(a)=\frac{\partial v}{\partial y}(a)-i\frac{\partial u}{\partial y}(a)}$$

ומכאן נקבל כי:

<u>משוואות קושי - רימן</u>:
$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \hdashline \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{array}}$$

<u>דוגמאות</u>: ① $f(z)=z^n$ (n טבעי). נבדוק שמשוואות קושי-רימן מתקיימות:
$$(x+yi)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}(yi)^k=\Big(\sum_{2k\le n}(-1)^k\cdot\binom{n}{2k}x^{n-2k}y^{2k}\Big)+i\Big(\sum_{2k+1\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}y^{2k+1}\Big)$$

אז
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k}(n-2k)x^{n-2k-1}y^{2k}\quad\text{ו-}\quad\frac{\partial v}{\partial y}=\sum_{2k+1\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1}x^{n-2k-1}(2k+1)y^{2k}$$

נשים לב ש-
$$\binom{n}{2k}(n-2k)=\frac{n!}{(2k)!(n-2k-1)!}\ ,\quad\binom{n}{2k+1}(2k+1)=\frac{n!}{(2k)!(n-2k-1)!}$$

אם $n=2m$ זוגי: הסכום הראשון $0\le k\le m$ ← האיבר האחרון מתאפס כי $k=m$ ...
הסכום השני $0\le k\le m-1$ ✓

אם $n=2m+1$ אי זוגי: ✓

נראה עכשיו שלא מספיק רק המשוואות של קושי-רימן.

② $f(z)=|z|^2$. f גזירה רק ב-$a=0$:
$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{|z|^2-|a|^2}{\underbrace{z-a}_{h}}=\frac{|h+a|^2-|a|^2}{h}\underset{|h+a|^2=(h+a)\overline{(h+a)}}{\overset{!}{=}}\frac{|h|^2+2\operatorname{Re}(h\cdot\bar a)+\cancel{|a|^2}-\cancel{|a|^2}}{h}=\bar h+\frac{h\bar a+\bar h a}{h}$$
$$=\underbrace{\bar h+\bar a}_{\xrightarrow{h\to 0}\ \bar a}+\frac{\bar h}{h}\cdot a$$

(לכל אחד מהם גבול שונה) גבול זה לא קיים

$$\lim_{h\to 0}\frac{\bar h}{h}=1\ \cancel{\neq 1}=\lim\frac{\bar h}{h}$$
$$\frac{\overline{iy}}{iy}=-\frac{iy}{iy}=-1$$

לכן רק כאשר $a=0$ הגבול קיים ושווה 0.

נבדוק איך זה מתקשר למשוואות קושי-רימן: $v(x,y)=0$, $|z|^2=|x+iy|^2=x^2+y^2=u(x,y)$

אז
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\iff 2x=0\iff x=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\iff -2y=0\iff y=0$$

③ $f(z)=\bar{z}$ – לא גזירה באף נקודה:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a}=\frac{\overline{(z-a)}}{z-a}=\frac{\bar{h}}{h}\longrightarrow$$ אין גבול כאשר $h\to 0$

נבדוק את זה ע"י מילוי משוואות קושי-רימן? $f(x+iy)=x-iy \Rightarrow u(x,y)=x,\ v(x,y)=-y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\neq -1=\frac{\partial v}{\partial y}$$

④ משוואות קושי-רימן אינן מספיקות לגזירות:

$f(z)=\begin{cases}\frac{\bar{z}}{z} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$ ← לא רציפה ב- $a=0$, ולכן לא גזירה שם.

אבל משוואות קושי-רימן מתקיימות ב- $a=0$:

$$f(x+iy)=\frac{x-iy}{x+iy}=\frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\cdot\frac{-2xy}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow u(x,0)=\frac{x^2}{x^2}=1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(a)=0 \quad , \quad v(x,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(0)=0$$

$$v(0,y)=0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}(a)=0 \qquad u(0,y)=\frac{-y^2}{y^2}=-1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(a)=0$$

משפט:

$f(z)$ גזירה ב- a $\Longleftrightarrow$ $u(x,y),\ v(x,y)$ (1) דיפרנציאביליות ב- a
(2) ומקיימות את משוואות קושי-רימן ב- a

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח $f(z)$ גזירה ב- a. ראינו כבר ש- v,u גזירות חלקית ומקיימות את משוואות CR בנק' a. נכתוב:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=f'(a)+\alpha(z)$$ כש- $\alpha(z)\xrightarrow[z\to a]{}0$

נכתוב כמו קודם $z=x+iy$, $a=a_1+ia_2$:
$$\alpha(z)=\alpha_1(z_1)+i\alpha_2(z_2)=\underset{\in\mathbb{R}}{\alpha_1(x,y)}+i\underset{\in\mathbb{R}}{\alpha_2(x,y)}$$

וראינו ש: $f'(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+\frac{\partial v}{\partial x}(a)$.

$$f(z)-f(a)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)\left((x-a_1)+i(y-a_2)\right)+\left(\alpha_1(x,y)+i\alpha_2(x,y)\right)\cdot\left(x-a_1+i(y-a_2)\right)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(a)(x-a_1)-\underset{\text{"}-\frac{\partial u}{\partial y}(a)\text{" קושי-רימן}}{\frac{\partial v}{\partial x}(a)}(y-a_2)+\underbrace{\alpha_1(x,y)(x-a_1)-\alpha_2(x,y)\cdot(y-a_2)}_{\delta_1(x,y)}+i\Big[\frac{\partial v}{\partial x}(a)(x-a_1)+\underset{\frac{\partial v}{\partial y}(a)}{\frac{\partial u}{\partial x}(a)}(y-a_2)+\underbrace{\alpha_2(x,y)(x-a_1)+\alpha_1(x,y)(y-a_2)\Big]}_{=\delta_2}$$

ואז:

$$u(x,y)-u(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial u}{\partial y}(a)(y-a_2)+\delta_1(x,y)$$

כאשר $\frac{\delta_1(x,y)}{|z-a|}\xrightarrow{z\to a}0$

וכן

$$v(x,y)-v(a)=\frac{\partial v}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial v}{\partial y}(a)(y-a_2)+\delta_2(x,y)$$

כאשר $\frac{\delta_2(x,y)}{|z-a|}\xrightarrow{z\to a}0$

זה אומר ש- v,u דיפ' ב- a.

($\Rightarrow$) נניח כי v,u דיפ' ב- a ומקיימות את משוואות CR ב- a.

דיפרנציאביליות $\Leftarrow$ $u(x,y)-u(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial u}{\partial y}(a)(y-a_2)+\beta_1(x,y)(x-a_1)+\beta_2(x,y)(y-a_2)$

כאשר $\beta_i(x,y)\xrightarrow{x+iy\to a}0$. וכנ"ל ל- v. ולפי זה נראה כמו מקודם

$f(z)-f(a)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)\left((x-a_1)+i(y-a_2)\right)+$ רק בגזירה הפוכה. למעלה נקבל

$+\beta_1(x,y)(x-a_1)+\beta_2(x,y)(y-a_2)+i\left[\delta_1(x,y)(x-a_1)+\delta_2(x,y)(y-a_2)\right]$ $\Big\}\xrightarrow{\text{נסמן}}\delta_1(z)(x-a_1)+\delta_2(z)(y-a_2)$

כאשר $\beta_i(x,y)\ ,\ \delta_i(x,y)\xrightarrow{z\to a}0$

$$\Rightarrow\ \frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)+\delta_1(z)\cdot\frac{x-a_1}{z-a}+\delta_2(z)\cdot\frac{y-a_2}{z-a}$$

כעת $\left|\delta_1(z)\cdot\frac{x-a_1}{z-a}\right|=|\delta_1(z)|\cdot\underbrace{\frac{|x-a_1|}{|z-a|}}_{\le1}\xrightarrow{z\to0}0$, וכנ"ל $\left|\delta_2(z)\cdot\frac{y-a_2}{z-a}\right|\to0$

ולכן ק"מ $\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)$ ∎

<u>דוגמה</u>: $f(z)=f(x+iy)=e^{x^2-y^2}(\cos(2xy)+i\sin(2xy))$ $\Leftarrow$ $\underbrace{u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)\ ,\ v(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin(2xy)}_{\text{פונקציות רציפות}}$

כעת צריך רק לבדוק CR:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x^2-y^2}\cdot2x\cdot\cos(2xy)-e^{x^2-y^2}\cdot2y\cdot\sin(2xy)$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{x^2-y^2}(-2y)\cdot\sin(2xy)+e^{x^2-y^2}\cdot2x\cdot\cos(2xy)$$
✓

ומתקיים גם $\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x^2-y^2}\cdot2x\cdot\sin(2xy)+e^{x^2-y^2}\cdot2y\cdot\cos(2xy)\overset{\checkmark}{=}-\frac{\partial u}{\partial y}$

$\Leftarrow$ לפי המשפט: גזירה (בכל המישור)

<u>הגדרה</u>: (פונקציה אנליטית)

יהי $f:U\to\mathbb{C}$, U פתוחה. אם f גזירה בכל <u>נקודה</u> של U, אומרים ש-f <u>אנליטית</u> (הולומורפית) ב-U.

<u>הערה</u>: הגדרה זו לא לנק' פתוחה, כי אפשר להגדיר גם נק' אחת כיוון שגזיר.

<u>הגדרה</u>: (תחום) קבוצה <u>פתוחה</u> במישור שהיא גם <u>קשירה</u>, נקרא <u>תחום</u> (domain)

<u>למה</u>:

יהי f פונקציה <u>אנליטית</u> בתחום U. נניח $f'(z)=0$ $\forall z\in U$.

אז f קבועה (על U)

<u>הוכחה</u>:

מתקיים לכל: $a\in U$: $0=f'(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)$ $\overset{\text{מ-CR}}{\Leftarrow}$ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$ בכל U, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$ בכל U

$\Leftarrow$ v,u קבועות על כל ישר המקביל לצירים.

נקבע $a\in U$. לכל $z\in U$ אפשר לקשר את z ל-a ע"י קו שבור מוכל ב-U, שצלעותיו (לפי למה שראינו מקודם)

מקבילות לצירים. כיוון ש-$v(x,y)$ רציפה בכל נק' של U וקבועה על כל אחד מהצלעות

של הישר הנ"ל, נקבל כי $v(z)=v(a)$. ובאופן דומה $u(z)=u(a)$. ולכן $f(z)=f(a)$ לכל $z\in U$ ∎

<u>דוגמאות</u>: (פונקציות אנליטיות)

• הפונקציה e^z

• $f(z)=f(x+iy)=e^x(\cos y+i\sin y)$ $\longleftarrow$ $\left\{\begin{array}{l}u(x,y)=e^x\cos y\\ v(x,y)=e^x\sin y\end{array}\right.$ רציפ'.

ומשוואות CR: $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}$, וגם $\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y=-\frac{\partial u}{\partial y}$ ✓. ולכן אנליטית.

ובנקודה a:
$$f'(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial y}(a)=e^x\cos y+ie^x\sin y\Big|_{z=a}$$
$$=f(a)$$

כלומר $f'(z)=f(z)$

• $f(z)$ מרחיבה את הפונ' e^x :
$$f(x+i\cdot 0)=e^x(\cos 0+i\sin 0)=e^x$$

ומקיים:
$$f(z_1+z_2)=f((x_1+x_2)+i(y_1+y_2))$$
$$=e^{x_1+x_2}\big(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\big)$$
טריג
$$=e^{x_1}\cdot e^{x_2}(\cos y_1+i\sin y_1)(\cos y_2+i\sin y_2)$$
$$=f(z_1)\cdot f(z_2)$$

$$\boxed{e^z=e^x(\cos y+i\sin y)}$$ סמן