מרוכבות - שיעור 26

14/01/10

הגדרה **Laen**: (קיבוץ - ווירשל רמה, 2007)

יהי $f(z)$ פונ' אנליטית בסביבת מחוקה $0<|z-z_0|<R$, ו- z_0 היא נקודה סינגולרית עיקרית של f.

אז התמונה של כל סביבה מחוקה של z_0 (המוכלת בסביבת הנ"ל) היא **צפופה** ב- $\mathbb{C}$.

הוכחה:

נניח בשלילה כי יש סביבה (מחוקה) $0<|z-z_0|<\delta$ ($\delta\le R$) שתמונתה לא צפופה, כלומר יש $\mathbb{C}$ בעל

שאינה נמצא של תמונת סביבה זו. אפשר שיש $\varepsilon>0$ כך שבעיגול $\{w\in\mathbb{C}: |w-b|<\varepsilon\}$ אין איברים

מ-תמונת $f(z)$ כאשר $0<|z-z_0|<\delta$. לכן, לכל z כך ש- $0<|z-z_0|<\delta$: $|f(z)-b|\ge\varepsilon$.

נגדיר $g(z)=\frac{1}{f(z)-b}$ ($0<|z-z_0|<\delta$). נראה פונקציה אנליטית בתחום $0<|z-z_0|<\delta$

(כי אם $|f(z)-b|\ge\varepsilon$ ומכאן $f(z)-b\ne 0$, נמצאת $f(z)-b$ אנליטית). כמו כן,

$|g(z)|=\frac{1}{|f(z)-b|}\le\frac{1}{\varepsilon}$ ← חסומה לכל $0<|z-z_0|<\delta$, ולכן z_0 היא נק' סינגולרית

סליקה של $g(z)$. נמשיך ונסמן ב- $g(z)$ את הרחבתה האנליטית של $g(z)$ ל- $0\le|z-z_0|<\delta$.

$f(z)-b=\frac{1}{g(z)}$ ולכן $0<|z-z_0|<\delta \Leftarrow f(z)=b+\frac{1}{g(z)}$. כיוון ש- z_0 היא "לכל היותר" קוטב של $\frac{1}{g(z)}$

מקרה: ← (• אם $g(z_0)\ne 0$ אז z_0 היא נק' סליקה משמולת ל- f. • אם $g(z_0)=0$ אז z_0 היא אפס,

נניח מסדר n, של $g(z)$. אז $g(z)=(z-z_0)^n h(z)$ ($h(z)$ אנליטית ומקומית, $h(z_0)\ne 0$) $\Longrightarrow \frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^n h(z)}$, ולכן z_0 היא קוטב

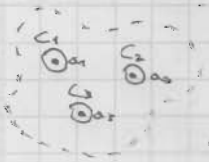
מסדר n של $\frac{1}{g(z)}$). מכל מקרה היא לא **סליקה** לכן z_0 היא נק' סינגולרית עיקרית.

$\boxtimes$

Laen השאריות

הקדמה נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום U, פרט לסופר סופי של נק' $a_1,\dots,a_n\in U$. נניח כי γ הוא

מסלול בתחום U, שאינו עובר דרך $a_1,\dots,a_n$ כך ש- $n(\gamma,z)=0$ לכל $z\notin U$.



נרצה לחשוב על $\int_\gamma f(z)\,dz$. נקיף כל נק' סינגולרית a_j

במעגל C_j (מספיק רחוק, ברגיל) כך שהעיגול הסגור שהוא מגדיר מוכל ב- U, ונניח כי

העיגולים אלה זרים זה לזה. נגדיר $\eta=\gamma-\sum_{j=1}^{n}n(\gamma,a_j)C_j$. זה מסלול ב- U.

אז $n(\eta,z)=0$ לכל z **מחוץ** ל- $\{a_1,\dots,a_n\}\cup U$:

אם $z\notin U$ אז $n(C_j,z)=0$ $\forall j=1,\dots,n$, ומכאן $n(\eta,z)=n(\gamma,z)=0$. אם $z=a_i$ אז:

$n(\eta,a_i)=n(\gamma,a_i)-\sum_{j=1}^{n}n(\gamma,a_j)\underbrace{n(C_j,a_i)}_{0\ \text{לכל}\ j\ne i}=n(\gamma,a_i)-n(\gamma,a_i)=0$, ולכן, מאינטגרל קושי מקבלים:

$\int_\eta f(z)\,dz=0$, ומכאן ש- $\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{j=1}^{n}n(\gamma,a_j)\cdot\int_{C_j}f(z)\,dz$. נגדיר מחדש את C_j כמעגל

לכן סביב a_j: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^{(j)}(z-a_j)^n$ ומקבלים

$$\int_{C_j}f(z)\,dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^{(j)}\cdot\underbrace{\int_{C_j}(z-a_j)^n\,dz}_{\substack{\to 0\ \text{לכל}\ n\ne -1\\ \to 2\pi i\ \text{לכל}\ n=-1}}=2\pi i\,b_{-1}^{(j)}$$

משפט: (השאריות)

נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום U פרט למספר סופי של נקודות $a_1,\dots,a_n \in U$.

נניח כי γ היא מסלול בתחום U שאינו עובר דרך $a_1,\dots,a_n$, אז $n(\gamma,z)=0$ לכל $z \notin U$.

אז

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma,a_j)\, b_{-1}^{(j)}}$$

הערה: מהגדרה: השאריה של f בנק' a_j - $b_{-1}^{(j)} = \operatorname{Res}_{z=a_j}(f(z))$

אז

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} n(\gamma,a_j)\cdot \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z)}$$

הערה: (קיבוץ מחדש שאריות)

כמו כן נראה, אם a הוא קוטב מסדר r של $f(z)$ אז:

$$f(z)=\frac{b_{-r}}{(z-a)^r}+\dots+\frac{b_{-1}}{z-a}+b_0+b_1(z-a)+\dots$$

$$(z-a)^r f(z) = b_{-r}+b_{-r+1}(z-a)+\dots+\underbrace{b_{-1}(z-a)^{r-1}}_{(r-1)!\,b_{-1}}+\dots$$

גזירה $r-1$ פעמים

$$\Longrightarrow \frac{1}{(r-1)!}\cdot\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left((z-a)^r f(z)\right)\Big|_{z=a} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$