12/1/10

מרוכבות - שיעור 25

טורי לורן (Laurent)

נדבר על טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ עם רדיוס התכנסות $R>0$. נציב $\frac{1}{z-z_0}$ במקום $z-z_0$.

אזי אם $\frac{1}{|z-z_0|}<R$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}$ מתכנס (בהחלט), כלומר אם $|z-z_0|>\frac{1}{R}$.

- אם $\rho>\frac{1}{R}$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}$ מתכנס במ"ש כאשר $\rho\le|z-z_0|$.
- אם $r<\frac{1}{R}$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}$ לא מתכנס במ"ש כאשר $|z-z_0|\le r$.

שאלה

מקרה כללי נדבר על טורי-לורן: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ עם $r<|z-z_0|<R$.

R = רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$

$\frac{1}{r}$ = רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}U^n$, $U=\frac{1}{z-z_0}$

טור כזה נקרא טור לורן

אם $r=0$ הטור מתכנס בטבעת $0<|z-z_0|<R$. אם כן, הטור לא מתכנס במ"ש בכל הטבעת.

על קבוצה סגורה וחסומה המוכלת בטבעת (הפתוחה) הטור מתכנס במ"ש.

← הטור מגדיר פונקציה הולומורפית בטבעת.

משפט לורן:

תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית בטבעת $r<|z-z_0|<R$.

אז בטבעת הזאת ניתן לפתח את הפונקציה כטור לורן: $\boxed{f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}$ [באופן יחיד]

ולכל נקודה $r<\rho<R$, אז המקדמים של הטור: $\boxed{a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta}$ (לכל n)

הוכחה:

יהיו γ_1,γ_2 שני מעגלים סביב z_0 המוכלים בטבעת הנתונה, כמו בציור. ←

תהי z נק' הנמצאת בטבעת הסגורה הנוצרת ע"י γ_1,γ_2. נסמן $\gamma=\gamma_2-\gamma_1$.

זהו מחזור שהומולוגי לאפס בטבעת הנתונה, מכיוון ש- $n(\gamma,a)=0$ לכל a כך ש- $|a-z_0|\ge R$ או $|a-z_0|\le r$.

ובנוסף לכך $n(\gamma,z)=n(\gamma_2,z)=1$. מנוסחת קושי:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right]$$

$$\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0-(z-z_0)}d\zeta=\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)\cdot 1}{(\zeta-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}d\zeta \longrightarrow \left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$$

התכנסות במ"ש על γ_2

$$=\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\right)d\zeta \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z-z_0)^n$$

טור טיילור (רגיל)

מ"ש

ובאופן דומה:

$$-\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-z_0-(\zeta-z_0)}d\zeta=\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}d\zeta \overset{!}{=} \int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^n}d\zeta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\gamma_1}f(\zeta)\cdot(\zeta-z_0)^n d\zeta\right)\cdot\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \dashrightarrow \left[k=-n-1 \text{ נסמן}\right]$$

התכנסות במ"ש על γ_1

ולכן סה"כ:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right]=$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right)(z-z_0)^n\right)+\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\right)(z-z_0)^k\right)$$ ← כאשר

ולסיום, נשים לב כי ρ הינו רדיוס בין ההיקפים של γ_1 ו-γ_2, ולכן, מהמשפט קושי:

$$\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \quad , \quad \int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta=\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$

וכ"ד ונקבל

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}\overset{\text{מקדמים}}{a_n}(z-z_0)^n \qquad \blacksquare$$

טורי לורן סביב z_0 היא יחידה: נניח $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ (בטבעת מלאה $r<|z-z_0|<R$)

ולכן גם: $f(z)(z-z_0)^k=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n+k}$. נניח כי $r<\rho<R$. נבצע אינטגרל של $|z-z_0|=\rho$

$$\int_{|\zeta-z_0|=\rho}f(\zeta)(\zeta-z_0)^k d\zeta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\int_{|\zeta-z_0|=\rho}(\zeta-z_0)^{n+k}d\zeta}_{\substack{=0 \text{ לכל } n\\ n\neq -k-1 \text{ פרט ל}}}\underset{n=-k-1}{=}a_{-k-1}\cdot 2\pi i$$

ולכן $a_{-k-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}f(\zeta)(\zeta-z_0)^k d\zeta$ (לכל k שלם)

$-k-1=n$

ולכן $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ לכל n שלם $\blacksquare$

דוגמא: $\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!\,z^{2n-1}}$ $\quad |z|>0$

הגדרה: (נקודה סינגולרית)

נניח כי $f(z)$ פונקציה אנליטית בסביבה מנוקבת $0<|z-z_0|<R$,

אז נאמר כי z_0 היא נקודה סינגולרית מבודדת של f.

1. נאמר כי z_0 היא נק' סינגולרית סליקה אם ניתן להגדיר את $f(z)$ כך שתהיה אנליטית בסביבה שלמה של z_0. [לא מנוקבת]

2. נאמר כי z_0 היא קוטב (pole) אם $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

3. אם z_0 אינה קוטב ואינה נק' סינגולרית סליקה, נאמר כי z_0 היא נקודה סינגולרית עיקרית של f.

למה: תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית ב- $0<|z-z_0|<R$,

אז z_0 היא נק' סינגולרית סליקה $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ חסומה בסביבה מנוקבת של z_0.

הוכחה:

($\Leftarrow$) אם z_0 סליקה, אז יש $g(z)$ אנליטית ב- $|z-z_0|<R$ כך ש- $g(z)=f(z)$ לכל $z\neq z_0$ בתחום (רציפה).

ובפרט קיים הגבול $\lim_{z\to z_0}f(z)=g(z_0)$, לכן יש סביבה של z_0 שבה $f(z)$ ($g(z)$) חסומה.

($\Rightarrow$) נניח כי $R_0<R$ הוא רדיוס כך שיש $M>0$ חסם של $f(z)$ ב- $0<|z-z_0|\le R_0$: $|f(z)|\le M$.
(של סביבה מנוקבת)

נראה ש-z_0 סליקה: נכתוב את פיתוח לורן של $f(z)$ ב- $0<|z-z_0|<R$: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$.

נראה כי $a_n=0$ לכל $n<0$; ומהמשפט לורן $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ כש- $r<\rho<R$, בלבד.

ניקח $\rho \le R_0$ ונשאיף לאפס. $|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\rho\cdot \max_{|z-z_0|=\rho}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} \le \frac{\rho}{\rho^{n+1}}\cdot M = M\rho^{-n} \xrightarrow[\rho\to0]{(n<0)} 0$

לכן המקדמים השליליים הם 0. לכן $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ ← וזהו טור טיילור.

לכן אם נגדיר את הרחבה האנליטית של f ב- $|z-z_0|<R$. ובפרט z_0 נגדיר כך: $f(z_0)=a_0$. ∎

דוגמאות: $\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\cdot\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots$ ← $z=0$ - סליקה

$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)+\dots$ ← $z=a$ - סליקה

נראה מה קורה בקוטב של f: נאמר כי z_0 הוא קוטב של $f(z)$, אם מתקיים $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

$[f(z)$ אנליטית ב- $0<|z-z_0|<R]$

נבחר $0<R_0<R$ כך ש- $f(z)\neq0$ עבור $0<|z-z_0|<R_0$.

נגדיר $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ ב- $0<|z-z_0|<R_0$. זוהי פונקציה אנליטית בטבעת המנוקבת $0<|z-z_0|<R_0$, וגם $\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=0$

לכן $\varphi(z)$ חסומה בסביבה מנוקבת של z_0, ולכן z_0 היא נק' סליקה עבור $\varphi(z)$. ולכן אפשר להגדיר את

$\varphi(z)$ כפונקציה אנליטית $[g(z)]$ בעיגול (לא מנוקב) $|z-z_0|<R_0$, ומתקיים (נקרא לה $g(z)$): ב- $0<|z-z_0|<R_0$: $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{g(z)}$.

וגם ב- z_0: $g(z_0)=0$ $\left(=\lim_{z\to z_0}\varphi(z)\right)$. לכן z_0 הוא אפס של הפונ' האנליטית $g(z)$ (כמו כן $g(z)$ אינה זהותית אפס).

לכן z_0 הוא אפס מסדר סופי, נאמר $n\ge1$, של $g(z)$. ואז אפשר לכתוב: $g(z)=(z-z_0)^n\cdot h(z)$

כש- $h(z)$ אנליטית ב- $|z-z_0|<R$, ו- $h(z_0)\neq0$. ואז נקבל:

$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n h(z)}=\frac{1/h(z)}{(z-z_0)^n}=\frac{\Phi(z)}{(z-z_0)^n}$. ומכאן שיש סביבה קטנה של z_0 שבה הפונקציה $\Phi(z)$ (אנליטית) אינה מתאפסת.

להיפך, כמובן, נניח: אם $\Phi(z)$ אנליטית בסביבה $|z-z_0|<r_0$ של z_0, וגם $\Phi(z_0)\neq0$,

אז לכל n טבעי, הפונקציה $f(z)=\frac{\Phi(z)}{(z-z_0)^n}$ יש קוטב ב- z_0. ברור כי $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

פיתוח לורן של $f(z)$ סביב z_0 זה מה שכבר ראינו קודם:

נכתוב את פיתוח טיילור: $\Phi(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\dots$, אז $f(z)=\frac{\Phi(z)}{(z-z_0)^n}=\frac{a_0}{(z-z_0)^n}+\frac{a_1}{(z-z_0)^{n-1}}+\dots$

- יש מספר סופי של חזקות שליליות של $z-z_0$ (בהפך מהמקרה של נק' ס).

<u>הגדרה</u>: (קוטב מסדר n)

נאמר כי z_0 הוא <u>קוטב מסדר n</u> ($n\ge1$ טבעי), של $f(z)$, אם הפיתוח הוא מהצורה:

$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}}+\dots$ המקדם הראשון אינו מתאפס - $a_{-n}\neq0$.

כש- $n=1$ אומרים קוטב <u>פשוט</u>: $f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\dots$.

<u>משפט</u>: (Casorati-Weirestrass)

נניח כי z_0 היא נק' סינגולרית עיקרית של $f(z)$,

אז התמונה דרך f של כל סביבה מנוקבת של z_0 היא <u>צפופה</u> ב- $\mathbb{C}$.