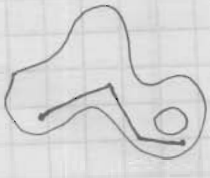
19/11/09

מרוכבות - שיעור 7

משפט: (אפיון לקבוצה פתוחה וקשירה במישור)



תהא קב' פתוחה $\emptyset\neq U\subseteq\mathbb{C}$. אז U קשירה

$\Updownarrow$

כל 2 נק' ב-U ניתנות לקישור ע"י קו שבור המוכל ב-U.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח כי U קשירה. נקבע $a\in U$. נגדיר:

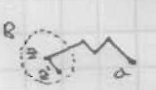
$U_1=$ {כל הנקודות ב-U אשר ניתנות לקישור עם a ע"י קו שבור, המוכל כולו ב-U}

וכן $U_2=U\setminus U_1$. $U_1\neq\emptyset$: כמובן $a\in U_1$ (לפי הגדרה), ויתרה מכך,

יהי B עיגול פתוח סביב a המוכל ב-U. ברור כי גם $B\subseteq U_1$

כמובן $U=U_1\dot\cup U_2$, ונראה ש-U_1 ו-U_2 פתוחות.

U_1 פתוחה: נניח כי $z\in U_1$. כיוון ש-U פתוחה יש עיגול פתוח B כך ש: $z\in B\subseteq U$. נראה כי $B\subseteq U_1$; נניח $z'\in B$ (ובפרט ב-U). נקשר את z ל-a ע"י קו שבור, מוכל ב-U (קיים כי $z\in U_1$), וכך נקבל קו שבור, מוכל ב-U, המחבר את z' ל-a. ולכן $z'\in U_1$ ולכן $B\subseteq U_1$ ולכן U_1 פתוחה.



U_2 פתוחה: יהי $z\in U_2$, ויהי B עיגול פתוח כך ש $z\in B\subseteq U$. נראה כי $B\subseteq U_2$:

נניח בשלילה שלא, כלומר קיים $z'\in B$ כך ש $z'\in U_1$. אז נקשר את z' ל-a ע"י קו שבור שמוכל ב-U, ואז נקשר את z ל-z' ע"י קטע שמוכל ב-B (ובפרט מוכל ב-U) ואז נקבל קו שבור המחבר את z ל-a, ולכן $z\in U_1$ בסתירה ($\begin{smallmatrix}z\in U_2\\ \Rightarrow z\notin U_1\end{smallmatrix}$), ולכן $B\subseteq U_2$, ולכן U_2 פתוחה.

לכן, כיוון ש-U קשירה, נקבל כי $U_2=\emptyset$ או $U_1=\emptyset$. כיוון ש-$U_1\neq\emptyset$ אז $U_2=\emptyset$.

ואז $U=U_1$, ולכן לכל $z,z'\in U$ נקשר את z ל-a, ואח"כ את a ל-z' ע"י קווים שבורים המוכלים ב-U. ולכן כל 2 נק' ניתנות לקישור ע"י קו שבור ב-U. $\blacksquare$

($\Rightarrow$) נניח כי ל-U יש את התכונה הנ"ל. נניח בשלילה כי U אינה קשירה.

אז אפשר להציג $U=A\cup B$ כאיחוד של שתי קבוצות זרות, לא ריקות, פתוחות ב-U.

נבחר $b\in B$, $a\in A$, ונקשר את a ל-b ע"י קו שבור המוכל ב-U.

ברור, ע"י מעבר הקודקודים של הקו השבור, שיש קטע בקו השבור שקצה אחד שלו

שייך ל-A, והקצה השני ל-B. נסמן אותו $[\alpha,\beta]$ עם $\alpha\in A,\beta\in B$. $\left([a,b]=\{a+t(b-a):0\le t\le1\}\subseteq U\right)$

נגדיר: $I_1=\{0\le t\le1:\alpha+t(\beta-\alpha)\in A\}$, $I_2=\{0\le t\le1:\alpha+t(\beta-\alpha)\in B\}$.

ברור כי $[0,1]=I_1\dot\cup I_2$ כאיחוד זר. נראה כי I_j סגורות ב-$[0,1]$:

נניח כי $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ סדרה ב-I_1 המתכנסת ל-t. כמובן $0\le t\le1$.

אז $\alpha+t_n(\beta-\alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha+t(\beta-\alpha) \in [\alpha,\beta]$ ב- A.

זוהי סדרת נק' ב-A המתכנסת לנק' (ב-$[\alpha,\beta]$) ב-U. כיוון ש-A סגורה ב-U,

אז גם $\alpha+t(\beta-\alpha) \in A$, כלומר $t \in I_1$. לכן I_1 סגורה.

באותו אופן, I_2 סגורה. אבל $[0,1]$ הוא קשיר, ולכן $I_1=\emptyset$ או $I_2=\emptyset$.

אבל $t=0 \in I_1$, $t=1 \in I_2$, סתירה! לכן U קשירה. ∎

<u>מסקנה:</u> (מההוכחה)

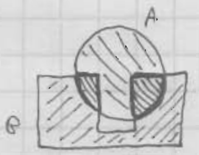
יהי $U\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה. אז U קשירה $\Updownarrow$

כל שתי נק' ב-U ניתנות לקישור ע"י קו שבור, שכולו ב-U, שצלעותיו <u>מקבילות לצירים</u>.

<u>מסקנה:</u>

עיגול פתוח, מלבן פתוח, משולש פתוח, מצולע פתוח, חצי מישור פתוח, רצועה פתוחה,

הן כולן קבוצות <u>קשירות</u>.



<u>הערה:</u> חיתוך של שתי קב' קשירות אינו בהכרח קשיר.

<u>למה:</u>

יהי A קשירה, אז לכל קב' B כך ש $A\subseteq B\subseteq\bar{A}$

גם B <u>קשירה</u>.

<u>הוכחה:</u>

נניח כי $B=B_1\cup B_2$ פירוק זר של שתי קב' פתוחות ב-B.

$$A = A\cap B = (\underbrace{A\cap B_1}_{\text{פתוחה ב-}A}) \cup (\underbrace{A\cap B_2}_{\text{פתוחה ב-}A})$$

ומכיוון ש-A קשירה אז $A\cap B_1=\emptyset$ או $A\cap B_2=\emptyset$.

נניח בה"כ ש- $A\cap B_1=\emptyset$. נראה כי $B_1=\emptyset$: נניח בשלילה ש- $B_1\neq\emptyset$. יהי $b\in B_1$.

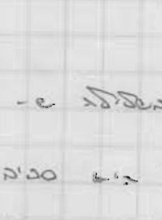
יהי $\underset{\text{ב-}\mathbb{C}}{V\subseteq X}$ פתוחה כך ש- $B_1=B\cap V$. בפרט V היא סביבה של b.

כיוון ש- $b\in\bar{A}$ יש $a\in A\cap V$, ואז $a\in A\cap V \underset{A=A\cap B}{=} A\cap B\cap V = A\cap B_1 = \emptyset$ סתירה!

לכן $B_1=\emptyset$, לכן לא קיימות 2 קב' פתוחות וזרות (ולא ריקות) שאיחודן הוא B. לכן B קשירה. ∎

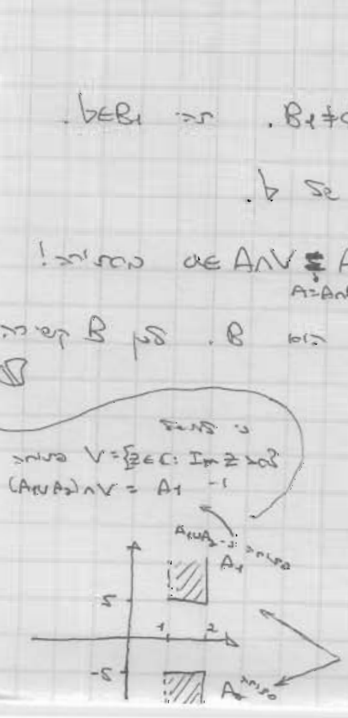
<u>דוגמאות:</u>

① $\left\{\text{תת קבוצה של שפה}\right\} \cup$ עיגול פתוח - קשיר.



② $A=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \begin{matrix}1<Re(z)\le 2\\ |Im\, z|\ge 5\end{matrix}\right\}\cup\{\infty\}$ - קשירה.

* נק' ה-∞ מקשרת בין 2 הקב'



הגדרה: (מרכיב קשיר - connected component)

נתון קב' $A\subseteq X$. תת קבוצה של A, שהיא קשירה מקסימלית

נקרא מרכיב קשיר של A.

משפט:

כל קבוצה A היא איחוד זר של המרכיבים הקשירים שלה.

הוכחה:

תהי $a\in A$. נסמן $B(a)=\left\{C\subseteq A: \begin{matrix} a\in C \\ \text{קשירה } C\end{matrix}\right\}$. נסמן $C(a)=\bigcup\limits_{C\in B(a)} C$

זוהי קב' קשירה כאיחוד של תת קבוצות קשירות שחיתוכן אינו ריק (כי $a\in\bigcap\limits_{C\in B(a)} C$).

$C(a)$ היא קב' קשירה מקסימלית, כי אם $C'\supseteq C(a)$ תת קב' קשירה של A,

אז ברור כי $C'\in B(a)$ ולכן $C'=\bigcup\limits_{C\in B(a)} C=C(a)$ ומכאן $C'=C(a)$.

זה מראה שכל נק' מ-A שייכת למרכיב קשיר ($a\in C(a)$, ו-$C(a)$ נקרא מרכיב קשיר של a)

כעת, נראה שלכל שני מרכיבים קשירים C_1,C_2: או $C_1=C_2$ או $C_1\cap C_2=\emptyset$.

נניח $C_1\cap C_2\neq\emptyset$. כיוון ש-C_1,C_2 קשירות, נסיק ש-$C_1\cup C_2$ קשירה.

כיוון ש-C_1,C_2 קשירות מקסימליות ומוכלות בקב' הקשירה $C_1\cup C_2$, נסיק $C_1=C_1\cup C_2=C_2$.

$\boxtimes$

למה:

תהי $U\subseteq X$ קבוצה פתוחה, אז המרכיבים הקשירים של U הם קב' פתוחות.

הוכחה:

נקב' פתוחה U, לכל נק' $a\in U$ יש סביבה קשירה המוכלת ב-U, כי אם $a\in\mathbb{C}$

אז אפשר לקחת עיגול פתוח המכיל את a ומוכל ב-U, ועיגול פתוח הוא קשיר.

ואם $a=\infty$, ניקח קב' פתוחה $\infty\in V\subseteq U$. אז המשלים של V הוא קב' סגורה

וחסומה במישור, $F:=V^c$. נניח כי $F\subseteq\{z\in\mathbb{C}: |z|\le M\}$, ולכן:

$$V \supseteq \mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus F = \underbrace{\{z\in\mathbb{C}: |z|>M\}}_{\text{קשירה}}\cup\underbrace{\{\infty\}}_{\text{נק' אינסוף של חוץ העיגול}} = \text{סביבה קשירה של } a=\infty$$

כלומר בכל מקרה קיימת

סביבה קשירה של a המוכלת ב-U. כעת, יהי $C_1\subseteq U$ מרכיב קשיר.

תהי $a\in C_1$. יש סביבה קשירה $a\in B\subseteq U$. $B\cap C_1\neq\emptyset$ כי a בחיתוך,

ולכן $B\cup C_1$ קשירה כאיחוד של שתי קב' קשירות לא זרות. כיוון ש-C_1 מרכיב

קשיר, וגם $C_1\subseteq C_1\cup B$, נסיק כי $C_1=C_1\cup B$, כלומר $B\subseteq C_1$.

לכן C_1 פתוחה. $\boxtimes$

גבול של פונקציה:

הגדרה: נניח כי נתונה $f: L\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, ונניח כי a ($\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$) היא נק' הצטברות של L.

נאמר כי $b\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ הוא גבול של $f(z)$ כאשר $z\in L$ שואף ל-a,

ונסמן $\lim\limits_{L\ni z\to a} f(z)=b$ אם לכל סדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq L$ המתכנסת ל-a

מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=b$.

הערה: הגבול יחיד.

למה:

יהי כי $b\in\mathbb{C}$. נסמן $f(z)=u(z)+iv(z)$ כאשר $u(z)=Re(f(z))$ ו- $v(z)=Im(f(z))$.

נניח $b=b_1+ib_2$ כאשר $b_1,b_2\in\mathbb{R}$. אז $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=b$ $\forall L\ni z_n\to a$.

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} u(z_n)=b_1$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} v(z_n)=b_2$

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{L\ni z\to a} u(z)=b_1$ וגם $\lim\limits_{L\ni z\to a} v(z)=b_2$ $\left(\begin{array}{l} z=x+iy \\ u(z)=u(x+iy)=\tilde{u}(x,y)\end{array}\right)$

הערה: אם $b=\infty$, ההגדרה שקולה ל- $\lim\limits_{z\to a}|f(z)|=\infty$.

הגדרה שקולה: $(\delta-\varepsilon)$

יהיו $a,b\in\mathbb{C}$, אם לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך ש:

$|z-a|<\delta,\ z\in L \Rightarrow |u(z)-b_1|<\varepsilon$

$|z-a|<\delta,\ z\in L \Rightarrow |v(z)-b_2|<\varepsilon$

אז נאמר כי b גבול של $f(z)$ כש- z שואף ל-a.

ובאופן שקול: לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך ש: $|z-a|<\delta,\ z\in L \Rightarrow |f(z)-b|<\varepsilon$

הערה: ⊙ אם $b=\infty$, $a\in\mathbb{C}$:

לכל $M>0$, קיים $\delta>0$ כך ש: $|z-a|<\delta,\ z\in L \Rightarrow |f(z)|>M$

⊙ אם $b\in\mathbb{C}$, $a=\infty$:

לכל $\varepsilon>0$, קיים $R>0$ כך ש: $|z|>R,\ z\in L \Rightarrow |f(z)-b|<\varepsilon$

⊙ אם $b=\infty$, $a=\infty$:

לכל $M>0$, קיים $R>0$ כך ש: $|z|>R,\ z\in L \Rightarrow |f(z)|>M$

ניסוח שקול לגבול בעזרת סביבות (בהגדרה כללית)

לכל סביבה U של b, יש סביבה V של a, כך ש: $z\in V\cap L \Rightarrow f(z)\in U$. (במילים: $V\cap L\subseteq f^{-1}(U)$)

הערה: הוכחות השקילויות - פשוטות יחסית.