מרוכבות - תרגול 8 8/12/09

## אינטגרלים מסילתיים של פונקציות אנליטיות

הגדרה: $\gamma:[a,b]\to U$ מסילה גזירה, $U$ תחום, $f:U\to\mathbb{C}$ אנליטית.

אז נגדיר: $\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

משפט:

לכל מסילה $\gamma$, $\int_\gamma f(z)dz$ תלוי רק בקצוות של המסילה $\gamma$

$\Updownarrow$

ל-$f$ יש קדומה אנליטית בתחום $U$

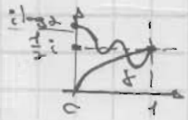
$\Updownarrow$

לכל מסילה סגורה $\Gamma\subseteq U$ מתקיים: $\int_\Gamma f(z)dz=0$

דוגמה: $n\neq-1$, $f(z)=(z-a)^n$, $\gamma$ מסילה סגורה, $a\notin\gamma$ $\Leftarrow$ $\int_\gamma (z-a)^n dz=0$

אם $\gamma$ מעגל סביב $a$ $\Leftarrow$ $\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz=2\pi i$

תרגילים: ① נחשב $\int_\gamma z\sin z\,dz$ כאשר:



נמצא קדומה:

$$\int z\sin z\,dz=\int z(-\cos z)'dz=-z\cos z+\int\cos z\,dz=-z\cos z+\sin z+C$$

מצאנו קדומה אנליטית ב-$\mathbb{C}$, לכן אין תלות במסילה. ניקח $\gamma$ כלשהי.

$$\int_\gamma z\sin z\,dz=(-z\cos z+\sin z)\Big|_{z=0}^{z=i\log 2}=-i\log 2\cdot\cos(i\log 2)+\sin(i\log 2)$$

כאשר:

$$\cos(i\log 2)=\frac{e^{i(i\log 2)}+e^{-i\cdot(i\log 2)}}{2}=\frac12\left(e^{-\log 2}+e^{\log 2}\right)=\frac12\left(\frac12+2\right)=\frac54$$

$$\sin(i\log 2)=\frac{1}{2i}\left(e^{-\log 2}-e^{+\log 2}\right)=\frac{1}{2i}\underbrace{\left(\frac12-2\right)}_{-\frac32}=\frac{3i}{4}$$

$$\Rightarrow\int_\gamma z\sin z\,dz=-i(\log 2)\cdot\frac54+\frac34 i$$

② נחשב: $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^3+4z}$

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{z^3+4z}=\frac{1}{z(z^2+4)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{z^2+4}=\dots=\frac{1}{4z}-\frac{z}{4(z^2+4)}\Rightarrow\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^3+4z}=\frac14\underbrace{\int_{|z|=1}\frac1z dz}_{2\pi i}-\frac18\int_{|z|=1}\underbrace{\frac{2z}{z^2+4}}_{\frac{?}{}(\mathrm{Log}(z^2+4))'}dz$$

צריך לבדוק שהיא אנליטית

נשים לב שבתחום $|z|<\frac32$ הפונקציה: $\mathrm{Log}(z^2+4)$ אנליטית... (קדומה אנליטית)


③ נחשב $\int \frac{1}{z}dz$ כאשר $\gamma$ מעוין הבא:

נראה ש- $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{|z|=1/4} \frac{dz}{z}$.


נגדיר $\gamma_1, \gamma_2$ כציור ונקבל $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} + \int_{|z|=1/4} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} - \int_{|z|=1/4} \frac{dz}{z}$

$V = \mathbb{C} \setminus \left\{ \begin{matrix} Re \le 0 \\ Im = 0 \end{matrix} \right\}$, $\gamma_1 \subseteq V$, ובתחום $V$ קיים ענף של $\mathrm{Log}\, z$ שהיא קדומה

ל- $\frac{1}{z}$, ולכן $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 0$.

בנוסף, $\gamma_2 \subseteq \mathbb{C} \setminus \left\{ \begin{matrix} Re \ge 0 \\ Im = 0 \end{matrix} \right\}$, ובתחום זה קיים ענף לוג, ולכן $\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = 0$.

$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$