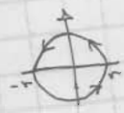
8/12/09

מרוכבות - שיעור 15

דוגמה: $\gamma: z(t)=re^{it}$, $0\le t\le 4\pi$



$\int_\gamma |z'(t)|dt = \int_0^{4\pi} r\,dt = 4\pi r$

$z'(t)=ire^{it}$

$|z'(t)|=r$

למה: תהי $f(z)$ רציפה על תמונת γ, אז

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \max_{z\in Im(\gamma)} |f(z)|\cdot l(\gamma)$$

הוכחה: ... $z(t)$, $t\in[a,b]$ ... :

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \le \int_a^b |f(z(t))z'(t)|dt = \int_a^b \underbrace{|f(z(t))|}_{\le \max_{a\le t\le b}|f(z(t))|}\cdot|z'(t)|dt \le \max_{z\in Im(\gamma)}|f(z)|\underbrace{\int_a^b|z'(t)|dt}_{l(\gamma)} \blacksquare$$

דוגמאות: 1) נחשב את $\int_\gamma x\,dz$ ($f(z)=f(x+yi)=x$) כאשר $\gamma: z(t)=\begin{cases}1+it & 0\le t\le 1\\ (2-t)+i & 1\le t\le 2\end{cases}$, אז $z'(t)=\begin{cases} i & 0\le t\le 1\\ -1 & 1\le t\le 2\end{cases}$

$$\int_\gamma x\,dz = \int_0^1 \underbrace{1}_{f(1+it)=1}\cdot \underbrace{i}_{z'(t)}\,dt + \int_1^2 (2-t)(-1)dt = i+\int_1^2(t-2)dt = i+\left[\frac{t^2}{2}-2t\right]_1^2 = i+\frac{3}{2}-2 = i-\frac{1}{2}$$

2) נחשב על γ^*:

$\gamma^*: z(t)=1+t(i-1) = (1-t)+it$, $0\le t\le 1$, $z'(t)=i-1$

$$\Rightarrow \int_{\gamma^*} x\,dz = \int_0^1 (1-t)(i-1)dt = (i-1)\int_0^1(1-t)dt = (i-1)\left[1-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}(i-1)$$

$f(z(t))=Re(z(t))=1-t$

$\int x\,dz$ תלוי במסלול, $x=Re\,z$

הערה: אם $f(z)=u(z)+iv(z)$ $\left(u(z)=Re f(z),\ v(z)=Im f(z)\right)$, $\gamma: z(t)=\underbrace{x(t)+iy(t)}_{\text{פונקציות ממשיות}}$, $a\le t\le b$ מסילה.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b \left(u(z(t))+iv(z(t))\right)\left(x'(t)+iy'(t)\right)dt$$

$$=\int_a^b \left(u(z(t))x'(t)-v(z(t))y'(t)\right)dt + i\int_a^b \left(u(z(t))y'(t)+v(z(t))x'(t)\right)dt$$

$u(z(t)) = u(x(t),y(t))$

$$= \underbrace{\int_\gamma u\,dx - v\,dy}_{\int_\gamma u\,dx-\int_\gamma v\,dy} + i\int_\gamma u\,dy+v\,dx \quad \leftarrow \text{אינטגרל קווי}$$

כאשר $\int_\gamma u\,dx = \int_a^b u(x(t),y(t))x'(t)dt$ וגם $\int_\gamma v\,dy = \int_a^b v(x(t),y(t))y'(t)dt$

תזכורת: יהיו $p(x,y), q(x,y)$ פונקציות רציפות על קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^2$, ונאמר שהאינטגרל הקווי $\int_\gamma p\,dx+q\,dy$ כאשר γ מסילה ב-U ...

אינטגרל קווי לא תלוי במסלול, אם לכל שתי מסילות γ_1,γ_2 ב-U עם אותן נקודות קצה (התחלה וסוף): $\int_{\gamma_1} p\,dx+q\,dy = \int_{\gamma_2} p\,dx+q\,dy$

תנאי שקול: לכל מסילה סגורה γ בתחום U : $\oint_\gamma p\,dx+q\,dy=0$.

הוכחת שקילות:

(⇐) אם γ סגורה אז γ ו-$-\gamma$ מתחילות ונגמרות באותה נקודה ולכן לפי ההנחה (אי תלות במסלול)

ולכן $\int_\gamma p\,dx+q\,dy=\int_{-\gamma} p\,dx+q\,dy$ אבל $\int_{-\gamma} p\,dx+q\,dy=-\int_\gamma p\,dx+q\,dy$ ולכן $\int_\gamma p\,dx+q\,dy=0$.

(⇒) נניח כי γ_1,γ_2 הן שתי מסילות ב-U, אשר מתחילות ומסתיימות באותן נקודות.

אז $\gamma_1+(-\gamma_2)$ היא מסילה סגורה (מתחילה ומסתיימת בנקודת ההתחלה של γ_1).

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1+(-\gamma_2)} p\,dx+q\,dy=0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} p\,dx+q\,dy+\int_{\gamma_2} p\,dx+q\,dy=0 \quad \blacksquare$$

משפט:

נניח שתי פונקציות ממשיות רציפות $p(x,y),q(x,y)$ בתחום $U\subseteq\mathbb{R}^2$.

אז האינטגרל $\int_\gamma p\,dx+q\,dy$ תלוי רק בקצוות המסילה לכל מסילה γ ב-U

$$\Updownarrow$$

קיימת פונקציה $V(x,y)$ על U (גזירה ברציפות) כך ש $\frac{\partial V}{\partial y}=q$, $\frac{\partial V}{\partial x}=p$

הוכחה:

(⇒) נניח ש-V כנ"ל. ותהי γ מסילה חלקה כלשהי: $(x(t),y(t))$ $a\le t\le b$

אז
$$\int_\gamma p\,dx+q\,dy=\int_a^b\left[p(x(t),y(t))x'(t)+q(x(t),y(t))y'(t)\right]dt$$
$$=\int_a^b\left[\frac{\partial V}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t)+\frac{\partial V}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)\right]dt$$

$\frac{d}{dt}\left[V(x(t),y(t))\right]$

כלל השרשרת

$$=V(x(b),y(b))-V(x(a),y(a))$$ = רק בקצוות γ

(⇐) נקבע נקודה $u_0=(x_0,y_0)$ ב-U. לכל נקודה $(x,y)\in U$ יש מסילה $\gamma_{(x,y)}$ המחברת

את u_0 ל-(x,y) ומוכלת ב-U. למשל קו שבור שצלעותיו מקבילות לצירים.

(a_1,b), (a,b), (a_0,b), (x_0,y_0)

נגדיר $V(x,y)=\int_{\gamma_{(x,y)}} p\,dx+q\,dy$ — לפי הנתון, מוגדר היטב ולא תלוי בבחירת $\gamma_{(x,y)}$.

וכן $V(x,y)$ מוגדרת היטב. תהי $(a,b)\in U$. אפשר לבחור את $\gamma_{(a,b)}$ כך שהצלע

האחרונה שלה מקבילה לציר x. נניח ש הקטע האחרון של הצלע האחרונה של $\gamma_{(a,b)}$ הוא (a_0,b).

מתוך זה קטע של הצלע האחרונה בין (a,b) לבין (a_1,b), שכולו מוכל ב-U.

נניח שלמשל $a_0<a$. אז לכל $a_0<x<a_1$ אז $V(x,b)=\overbrace{\int_{\gamma_{(a_0,b)}} p\,dx+q\,dy}^{\text{לא תלוי ב-}x}+\int_{a_0}^{x} p(t,b)\,dt$ ← של הצלע האחרונה

על הצלע האחרונה מתקיים: $z(t)=(t,b)$, $z'(t)=(1,0)$

כי: $a_0\le t\le a_1$: $x(t)=t$, $y(t)=b$, $x'(t)=1$, $y'(t)=0$

ומכאן רואים כי $x\mapsto V(x,b)$ גזירה $\frac{\partial}{\partial x}V(x,b)=p(x,b)$ ומקבלים $\frac{\partial V}{\partial x}=p$

ובאופן דומה $\frac{\partial V}{\partial y}=q$. נחזור ל- $\int_\gamma f(z)\,dz$ וכעת נקבל:

$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_\gamma u\,dx-v\,dy+i\int_\gamma v\,dx+u\,dy$ ← תלוי רק בקצוות המסילה ⟺ קיימות פונקציות המקיימות את התנאים

$\Longleftarrow$ קיימות שתי פונקציות $G(x,y)$, $F(x,y)$ על תחום U כך ש- $\frac{\partial F}{\partial y}=-v$, $\frac{\partial F}{\partial x}=u$

וכן $\frac{\partial G}{\partial y}=u$, $\frac{\partial G}{\partial x}=v$.

לכן נגדיר $(z\in U)$ $\Phi(z)=\Phi(x+yi)=F(x,y)+iG(x,y)$. כמובן ש- $F(x,y)$, $G(x,y)$

דיפרנציאביליות על U (כי בעלות נגזרות חלקיות רציפות).

וכן מתקיימות קושי רימן: $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial G}{\partial x}$.

לכן $\Phi(z)$ אנליטית ב-U. $\Phi'(z)=\frac{\partial F}{\partial x}(z)+i\frac{\partial G}{\partial x}(z)=u(z)+iv(z)=f(z)$

$\blacksquare$

משפט:

יהי $f(z)$ פונקציה רציפה (מרוכבת) על תחום $U\subseteq\mathbb{C}$.

אז $\int_\gamma f(z)dz$ תלוי רק בנקודות הקצה (γ מסילה ב-U)

$\Updownarrow$

$f(z)$ היא נגזרת של פונקציה אנליטית ב-U (כי ל- $f(z)$ קיימת אנליטית ב-U)

מסקנה:

יהי $f(z)$ פונקציה רציפה על תחום U. נניח כי ל- $f(z)$ יש קדומה אנליטית ב-U.

אז $\int_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסילה סגורה המוכלת ב-U.

דוגמאות: ① יהי n שלם. אז $\int_\gamma (z-a)^n dz=0$ לכל מסילה סגורה γ,

כי $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ היא קדומה אנליטית של $(z-a)^n$.

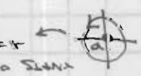
② יהי $n\leq-2$ שלם. אז לכל מסילה סגורה γ שאינה עוברת דרך a $(a\notin\gamma)$

מתקיים $\int_\gamma (z-a)^n dz=0$ 

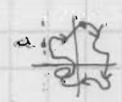
הסבר: נתון ש- $Im(\gamma)$ סגורה, ולכן $\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$ פתוחה, ונתון ש- $a\in\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$, כי γ לא עוברת

סביב a כדור כולו ב- $\mathbb{C}\setminus Im(\gamma)$. יהי B כדור סגור סביב a הכלול בתחום הנ"ל.

ב-U יש ל- $(z-a)^n$ קדומה אנליטית והיא $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ $(n\geq-2)$

③ $n=-1$. $\int\frac{dz}{z-a}$  $|z-a|=r$ (מעגל סביב a). $0\leq t\leq2\pi$, $z-a=re^{it}$

$z(t)=a+re^{it}$, $z'(t)=ire^{it}\Rightarrow\int_0^{2\pi}\frac{ire^{it}}{re^{it}}dt=2\pi i$

④  $\Longrightarrow$ $\int_\gamma\frac{dz}{z-a}=0$

מכיוון שיש ענף של $\log(z-a)$ שהוא קדומה אנליטית, ולכן $\int=0$.