מרוכבות - שיעור 24

7/1/10

הגדרה: (תזכורת)

מעגל (cycle) זהו סכום פורמלי $\gamma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \dots + n_k\gamma_k$ כאשר $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ הן מסילות סגורות, ו- $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{Z}$. (כלומר $((\gamma_1,n_1),(\gamma_2,n_2),\dots,(\gamma_k,n_k))$).

הגדרה: נניח כי $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ מוכלות בתחום U, ו- $f(z)$ פונקציה אנליטית על U.

נגדיר $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot \int_{\gamma_i} f(z)\,dz}$ (כאן די ש- $f(z)$ רציפה על $\bigcup_{i=1}^{k} Im(\gamma_i)$)

ובנוסף ל- $a \notin \bigcup_{i=1}^{k} Im(\gamma_i)$: $\boxed{n(\gamma,a) = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot n(\gamma_i,a)}$ נגדיר

משפט קושי: (תזכורת)

יהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום U. יהי γ מעגל ב- U כך ש- $\gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i\gamma_i$ כנ"ל, ו- $n(\gamma,a)=0$ $\forall a \notin U$. אז מתקיים:

(א) $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$. (ב) $\boxed{\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 2\pi i \cdot n(\gamma,z) f(z)}$ לכל $z \in U \setminus \bigcup_{i=1}^{k} Im(\gamma_i)$.

הוכחה:

דומה כמעט מילה במילה למקרה של מסילה סגורה אחת: נגדיר: $U' = \{z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} Im(\gamma_i) \mid n(\gamma,z)=0\}$.

U' היא קבוצה פתוחה, כי ניתן לכתוב אותה כ- $U' = \{z \in \bigcap_{i=1}^{k} (\mathbb{C} \setminus Im(\gamma_i)) \mid n(\gamma,z)=0\}$. ומכאן ההוכחה זהה. ◻

מסקנה: מקרה פרטי:

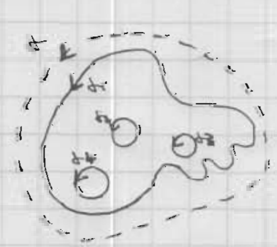
נניח כי γ_1,γ_2 הן מסילות סגורות בתחום U כך ש- $n(\gamma_1,a)=n(\gamma_2,a)$ לכל $a \notin U$.

אז לכל פונקציה אנליטית $f(z)$ על U: $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

(הוכחה: כי $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ הוא מעגל מתאים)

* **הערה:** ניתן לפרק אינטגרל על מסילה נתונה, בצורה שבה מקיפה את a ...

דוגמא: (ראה לעיל)



$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$, ו- $n(\gamma,a) = 0$ $\forall a \notin U$.

אז $\sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} f = 0$ ולכן $\int_{\gamma_1} f = \sum_{i=2}^{4} \int_{\gamma_i} f$.

הערה: אין לדון בשאלת קיום ענף של $\log$ של פונקציה.

משפט: (קיום ענף של ה- log)

יהי U תחום פשוט קשר, ותהי $f(z)$ פונ' אנליטית ב-U כך ש- $f(z)\neq 0$ לכל $z\in U$.

אז קיים ענף של $\log f(z)$ ב-U.

הוכחה:

הפונקציה $\frac{f'(z)}{f(z)}$ אנליטית ב-U. ממשפט קושי: $\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$ לכל מסילה סגורה ~~בתחום~~ ב-U

לכן ל- $\frac{f'(z)}{f(z)}$ יש קדומה אנליטית $F(z)$ ב-U. נסמן פונקציה: $g(z)=e^{-F(z)}f(z)$.

נשים לב ש- $g'(z) = -e^{-F(z)}\cdot \underbrace{F'(z)}_{=\frac{f'(z)}{f(z)}}\cdot f(z) + e^{-F(z)}\cdot f'(z) = 0$ ולכן $g(z)=c\ (\neq 0)$ קבועה על U.

$e^{F(z)} = \frac{1}{c}\cdot f(z)$. נבחר $a\in\mathbb{C}$ כך ש- $\frac{1}{c}=e^{a}$, ואז $e^{F(z)-a}=f(z)$, ולכן $F(z)-a$

הוא ענף (אנליטי) של $\log f(z)$ ב-U. ∎

מסקנה: (מקרה פרטי)

עבור $f(z)=z$, אם U הוא תחום פשוט קשר כך ש- $0\notin U$,

אז יש ענף של $\log z$ ב-U.

הערה: בהמשך נדון בפונקציות אנליטיות פרט לנקודה.