3/12/08

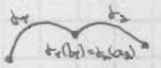
מסילות - שיעור 14

הגדרה: (מסילה הפוכה)

מסילה הפוכה למסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ היא מסילה $-\gamma$ הנתונה ע"י $-\gamma:[-b,-a]\to\mathbb{C}$

כך ש- $(-\gamma)(t)=\gamma(-t)$ ל- $-b\le t\le -a$

דוגמא: $\begin{cases} z(t)=e^{-it} \\ -2\pi\le t\le 0\end{cases}$ — הפוכה למסילה: $z(t)=e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$



הגדרה: (סכום מסילות)

נתונות שתי מסילות $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$, $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{C}$, ונניח כי $\gamma_1(b_1)=\gamma_2(a_2)$.

נגדיר את המסילה $\gamma_1+\gamma_2$ ע"י: $z(t)=\begin{cases}\gamma_1(t) & a_1\le t\le b_1\\ \gamma_2(t-b_1+a_2) & b_1\le t\le b_1+b_2-a_2\end{cases}$

שינוי פרמטר מסילה

נתונה מסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ונתונה פונקציה רציפה $h:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ כך ש-

$h(\alpha)=a$, $h(\beta)=b$ (כלומר מונוטונית עולה כי h על). אז

$\gamma\circ h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ הנתונה ע"י $(\gamma\circ h)(s)=\gamma(h(s))$, היא מסילה.

נאמר כי $\gamma\circ h$ התקבלה מ-γ ע"י <u>שינוי פרמטר</u> $t=h(s)$, $\alpha\le s\le\beta$.

הגדרה: (אינטגרל קווי)

האינטגרל הקווי של פונקציה $f(z)$ לאורך מסילה γ: נתונה מסילה γ לא בהכרח חלקה

$z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ (נניח γ חלקה למקוטעין). ונתונה פונ' $f(z)$ רציפה על $Im(\gamma)$.

$\gamma(t)$ מקבל

אז האינטגרל הקווי של $f(z)$ לאורך γ הוא: $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz := \boxed{\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt}$ (אם קיים ב-$\mathbb{C}$)

* כמו כן האינטגרל $\int_\gamma$ לינארי ב-f:

$$\int_\gamma (c_1 f_1(z)+c_2 f_2(z))\,dz = c_1\int_\gamma f_1(z)\,dz + c_2\int_\gamma f_2(z)\,dz$$

$c_1,c_2\in\mathbb{C}$, ונניח $f_1(z)$ ו- $f_2(z)$ רציפות על $Im(\gamma)$

* האינטגרל אינו משתנה תחת <u>שינוי פרמטר</u>: נניח כי $h:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ רציפה,

גזירה ברציפות (כלומר גזירה ברציפות על קטעים סופי של קטע), ו- $h(\alpha)=a$, $h(\beta)=b$.

נסמן ב-γ' את המסילה המתקבלת מ-$\gamma\circ h$, אז $\displaystyle\int_{\gamma'} f(s)\,ds=\int_\gamma f(z)\,dz$. הוכחה:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt \underset{\substack{t=h(s),\ dt=h'(s)ds\\ \alpha\le s\le\beta}}{=} \int_\alpha^\beta f(z(h(s)))\,z'(h(s))\,h'(s)\,ds = \int_\alpha^\beta f((z\circ h)(s))\,(z\circ h)'(s)\,ds = \int_{\gamma'} f(s)\,ds$$

* מסקנה: $\boxed{\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz}$. הוכחה:

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz \overset{\text{הגדרה}}{=} \int_{-b}^{-a} f(z(-t))\,\underbrace{\frac{d}{dt}(z(-t))}_{-z'(-t)}\,dt = -\int_{-b}^{-a} f(z(-t))\,z'(-t)\,dt \underset{\substack{\text{שינוי משתנה}\\ t\to -t,\ dt\to -dt}}{=} \int_b^a f(z(t))\,z'(t)\,dt = -\int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

* נניח כי $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, אז:

$$\boxed{\int_{\gamma}F(z)dz=\int_{\gamma_1}F(z)dz+\int_{\gamma_2}F(z)dz}$$

הוכחה: נניח כי γ_i מסלול ע"י $z_i:[a_i,b_i]\to\mathbb{C}$, $i=1,2$, $z_1(b_1)=z_2(a_2)$. נגדיר

$$z(t)=\begin{cases}z_1(t) & a_1\le t\le b_1\\ z_2(t-b_1+a_2) & b_1\le t\le b_1+b_2-a_2\end{cases}$$

לכן
$$z'(t)=\begin{cases}z_1'(t) & a_1\le t\le b_1\\ z_2'(t-b_1+a_2) & b_1\le t\le b_1+b_2-a_2\end{cases}$$
← קיים $z'(t)$ אולי חוץ מנקודה $t=b_1$.

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2}F(z)dz=\int_{a_1}^{b_1+b_2-a_2}F(z_1(t))z_1'(t)dt=\int_{a_1}^{b_1}F(z_1(t))z_1'(t)dt+\int_{b_1}^{b_1+b_2-a_2}F(z_2(\underbrace{t-b_1+a_2}))z_2'(t-b_1+a_2)dt$$

הצבה (* לפי)

החלפת משתנה $t\mapsto t+b_1-a_2$

$$=\int_{a_1}^{b_1}F(z_1(t))z_1'(t)dt+\int_{a_2}^{b_2}F(z_2(t))z_2'(t)dt$$

$$=\int_{\gamma_1}F(z)dz+\int_{\gamma_2}F(z)dz$$

אורך מסילה חלקה למקוטעין

מסילה γ מוגדרת ע"י $z(t)$ עבור $a\le t\le b$.

האורך של γ :

$$\boxed{\ell(\gamma)=\int_a^b|z'(t)|dt}$$