3/11

מרוכבות - תרגול 3

תזכורת: $Arg(z_1z_2)=Arg(z_1)+Arg(z_2)$, $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$. ולכן ל- $w=z^4$ יש 4 פתרונות

טופולוגיה במישור ובמישור המורחב ($\mathbb{C}$ ו- $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$)

תזכורת: $U\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה אם לכל $x\in U$ יש כדור פתוח B כך ש- $x\in B\subseteq U$.

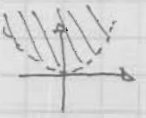
ו- $U\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ פתוחה אם: 1. $\infty\notin U$ ← U פתוחה ב- $\mathbb{C}$

2. $\infty\in U$ ← $\hat{\mathbb{C}}\setminus U$ קב' סגורה וחסומה ב- $\mathbb{C}$.

הגדרה: (קבוצה סגורה - הגדרה שקולה)

$F\subseteq\hat{\mathbb{C}}$ קב' סגורה אם לכל סדרה $\{z_n\}\subseteq F$, המתכנסת לנק' $z\in\hat{\mathbb{C}}$ מתקיים $z\in F$.

דוגמאות: (1) נוכיח כי $U=\{x+iy \mid x,y\in\mathbb{R},\ y>x^2\}$ קב' פתוחה. (ב- $\mathbb{C}$)



נוכיח ש- $U^c=F=\{x+iy \mid y\le x^2\}$ קב' סגורה:

ניקח סדרה $\{z_n\}\subseteq F$, $z_n=x_n+iy_n$ כאשר $y_n\le x_n^2$. אם z_n מתכנסת ל- $z\in\mathbb{C}$, $z=x+iy$

לפי חוקי גבולות $x_n\to x$, $y_n\to y$, ולפי חוקי גבולות וחשבון מתקיים:

$\underbrace{\lim y_n}_{y}\le\underbrace{\lim x_n^2}_{x^2}$ ולכן $y\le x^2$. ולכן $z=x+iy\in F$ כמ"ש. ∎

(*) האם U פתוחה גם ב- $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$? - כן, כי $\infty\notin U$ ולכן מספיק שהיא פתוחה ב- $\mathbb{C}$.

(*) $V=U\cup\{\infty\}$. האם V פתוחה ב- $\hat{\mathbb{C}}$? - לא! המשלים $\hat{\mathbb{C}}\setminus V=\underset{\text{סגורה}}{F}$, אבל F לא

חסומה, ולכן אין תנאי מספיק לקב' פתוחה ב- $\hat{\mathbb{C}}$.

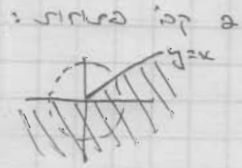
(*) $F_1=F\cup\{\infty\}$. האם F_1 סגורה ב- $\hat{\mathbb{C}}$? - כן. כי המשלים

$U=\hat{\mathbb{C}}\setminus(F\cup\{\infty\})$ פתוחה ב- $\hat{\mathbb{C}}$.

(*) האם F סגורה ב- $\hat{\mathbb{C}}$? - לא! כי המשלים שלה $U\cup\{\infty\}$ לא פתוח. (לא כי F לא חסומה)

(2) נבדוק $U=\{z\in\mathbb{C}: -\pi<Arg(z)<\frac{\pi}{4}\}$ ($|z|>2$) כש- $Arg:\mathbb{C}\to[-\pi,\pi)$

פתרון: נראה כי U פתוחה. נשים לב ש- U היא חיתוך של 2 קב' פתוחות:



$U=\{|z|>2\}\cap\{-\pi<Arg(z)<\frac{\pi}{4}\}$

פתוחה, כי המשלים סגור (כדור סגור)

פתוחה, מהגדרה. (הוכחה בפרק הבא)

$z=x+iy\in U$. 1) $x<0$. במקרה זה ניקח רדיוס $|y|$

2) $x>0$. ניקח $\min(|x|,|y|)$

3) במקרה זה נתייחס למרחק מהישר $x-y=0$

ב: $V=\{x+iy \mid \underbrace{\sin(x+2y)}_{f_1(x,y)}+i(\underbrace{2y-1}_{f_2(x,y)})\in U\}$ ‏U פתוחה. להוכיח V קב' פתוחה.

<u>לפני הכל נזכיר:</u> אם V פתוחה ב-$\mathbb{C}$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ רציפה (כלומר החלק המדומה והממשי רציפים), אז $f^{-1}(V)$ היא גם פתוחה.

ובמקרה:
$f=f_1(x,y)+if_2(x,y)$

<u>הוכחה:</u>

נסמן $V=f^{-1}(U)$. ניקח $\forall z_0=x_0+iy_0\in V$. נראה שיש עיגול פתוח סביב z_0 ב-V.

נסמן $u_0=f(z_0)=f_1(z_0)+if_2(z_0)\underset{\text{מהגדרת } V}{\in} U$.

כיוון ש-U פתוחה, קיים עיגול פתוח סביב u_0 שמוכל ב-U.

אז קיים ריבוע פתוח סביב u_0 ב-U, כלומר קיים $\varepsilon>0$ כך ש:

$$\begin{cases}|x-f_1(z_0)|<\varepsilon\\|y-f_2(z_0)|<\varepsilon\end{cases}\overset{(*)}{\Rightarrow}(x,y)\in U.$$

מרציפות של f_1 ו-f_2 קיים $\delta>0$ כך ש- אם

$$\begin{cases}|x-x_0|<\delta\\|y-y_0|<\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|f_1(x,y)-f_1(x_0,y_0)|<\varepsilon\\|f_2(x,y)-f_2(x_0,y_0)|<\varepsilon\end{cases}$$

לכל כאלה לפי מעבר (*) כמו קודם ש-

$(f_1(x,y),f_2(x,y))\in U$, כלומר $f(x+iy)\in U\Rightarrow x+iy\in f^{-1}(U)=V$