מרוכבות - תרגול 7

1/12/09

משפט: (הוכחה בהמשך)

יהי $f:U\to\mathbb{C}$ ($f=u+iv$) פונקציה גזירה ברציפות, U תחום. אזי מתקיים:

f אנליטית $\Leftrightarrow$ f שומרת על הזוויות בין מסילות העוברות דרך z_0 ו- $f'(z_0)\neq 0$

הגדרות: הגדרה: מסילה זו פונקציה רציפה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$,

נאמר $\gamma(t)=g(t)+ih(t)$, אם $t\in[a,b]$, ו- $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות

הגדרה: γ גזירה ב-t_0 אם g,h גזירות ב-t_0, ואז: $\gamma'(t_0)=g'(t_0)+ih'(t_0)$

הערה: אם $\gamma'(t_0)\neq 0$ אז $\gamma(t)\neq\gamma(t_0)$ עבור t מספיק קרוב ל-t_0 (לכן ממשי ומספיק)

למה:

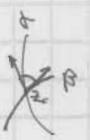
$$\frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}=\lim_{t\to t_0^+}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}\quad,\quad -\frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}=\lim_{t\to t_0^-}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}$$

הוכחה:

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}=\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\cdot\frac{t-t_0}{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}=\underbrace{\left(\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\right)}_{\xrightarrow{t\to t_0}\ \gamma'(t_0)}\Big/\underbrace{\left(\frac{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|}{t-t_0}\right)}_{\substack{\to |\gamma'(t_0)|,\ t\to t_0^+\\ -|\gamma'(t_0)|,\ t\to t_0^-}}$$

הגדרות:

- משיק למסילה γ בנק' t_0 הוא $\gamma'(t_0)$ [במידה וקיים]
- זווית בין מסילות: תהיינה β,γ מסילות כך ש- $\gamma(t_0)=\beta(t_1)=z_0$.



אזי הזווית בנק' z_0 בין המסילות β ו-γ היא הזווית בין המשיקים,

כלומר $\measuredangle(\gamma,\beta):=\measuredangle(\gamma'(t_0),\beta'(t_1))=\arg\gamma'(t_0)-\arg\beta'(t_1)$

למה 2:

יהי $f:U\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ אנליטית. תהי $\gamma:[a,b]\to U$ מסילה גזירה ב-t_0 ב-$[a,b]$.

כך ש $\gamma'(t_0)\neq 0$. אזי המסילה $f(\gamma(t))$ גזירה ב-t_0, ומתקיים:

$$[f(\gamma(t))]'(t_0)=f'(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)$$

הוכחה:

נסמן $\tilde{\gamma}(t)=f(\gamma(t))$. אז

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\tilde\gamma(t)-\tilde\gamma(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))}{t-t_0}=$$

$$=\underbrace{\lim_{t\to t_0}}_{\gamma(t)\to\gamma(t_0)\ \text{מרציפות}}\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))}{\gamma(t)-\gamma(t_0)}\cdot\lim_{t\to t_0}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}=f'(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)\ \blacksquare$$