

Maßstab: $a_n = R$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ Maßstab

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \cdot (k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) (z-z_0)^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) (z-z_0)^{n-k} \Rightarrow f^{(k)}(z_0) = a_k \cdot k!$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad k=0,1,2,\dots$$

Maßstab: Maßstab $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ Maßstab $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ Maßstab

($r \neq R_1, R_2$ -w $|z-z_0| < r$) z_0 Maßstab R_1, R_2 Maßstab

$$(z-z_0) \text{ Maßstab } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad \text{Maßstab}$$

$$\forall n. \quad a_n = b_n \quad \text{Maßstab}$$

Maßstab

$|z-z_0| < r$ Maßstab $f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z)$ Maßstab $|z-z_0| < r$ Maßstab $f(z) = g(z)$ Maßstab

$$k \geq 0 \text{ Maßstab } a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} = b_k \quad \text{Maßstab}, \quad k \geq 0 \text{ Maßstab } f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \quad \text{Maßstab}$$

Maßstab e^z

$$\begin{cases} f(z) = f(z) \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{Maßstab}$$

Maßstab e^z Maßstab

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{Maßstab} \quad f(0) = 1 \quad \text{Maßstab}$$

$$\text{Maßstab} \Rightarrow \text{Maßstab} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{Maßstab} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{Maßstab} \quad (R=\infty \text{ Maßstab}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} \quad \text{Maßstab}$$

(Maßstab) Maßstab

($x \in \mathbb{R}$) Maßstab $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ Maßstab

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{Maßstab} \quad e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i \sin z$$

Maßstab $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ Maßstab

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (1 + (-1)^n) i^n z^n$$

$$\Rightarrow \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Maßstab

Loen

(Bsp. 1.2.1) Sei für die $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ Loen dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ Loen auch.

Skizze

$\sum_{k=1}^n z_{\sigma(k)} = z$ ist klar. $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ Loen
 $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$: nach S. 1.2.1 für N Loen $\sum_{k=1}^N |z_k| < \infty$

$M = \max_{j \in F} j$ Loen. $F = \{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(N)\}$ ist $F = \sigma^{-1}(\{1, 2, \dots, N\})$ Loen
 $\sigma(F) = \{1, 2, \dots, N\}$ ist Loen $n \geq M$ ist Loen. $F \subseteq \{1, 2, \dots, M\} \iff$
 $\sigma(F) \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ ist Loen

$$\sum_{k=1}^n z_{\sigma(k)} = z = \sum_{k \in F} z_{\sigma(k)} + \sum_{k \notin F} z_{\sigma(k)} = \sum_{k \in F} z_{\sigma(k)} + \sum_{j \in \sigma(F)} z_j = \sum_{j \in \sigma(F)} z_j + \sum_{j \notin \sigma(F)} z_j$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n z_{\sigma(k)} - z \right| \leq \left| \sum_{j \in \sigma(F)} z_j - z \right| + \left| \sum_{j \notin \sigma(F)} z_j \right| = \left| \sum_{j \in \sigma(F)} z_j \right| + \left| \sum_{j \notin \sigma(F)} z_j \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} |z_j| + \sum_{j=N+1}^{\infty} |z_j| \leq 2\varepsilon$$

Loen (Bsp. 1.2.1)

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=n}^{\infty} a_m b_m \right)$ ist Loen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Loen dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Loen

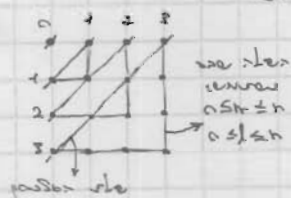
Skizze

$$c_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m b_m$$

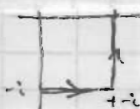
$$\left| \sum_{j=0}^n c_j \right| \leq \sum_{j=0}^n |c_j| \leq \sum_{j=0}^n \sum_{m=j}^{\infty} |a_m| |b_m| \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right)$$

ist Loen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist Loen

oder $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} a_m b_m$ Loen (ist Loen) Loen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Loen



$$z_n = \sum_{n \leq j \leq n} a_j b_j = \left(\sum_{j=0}^n a_j \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right)$$



$$z(t) = \begin{cases} t(t-1) & 0 \leq t \leq 1 \\ t(t+1) & -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$