

משפט הפונקציה ההפוכה

בהינתן $f: W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה $C^1(W, \mathbb{R}^m)$ ונניח כי $(Df)_a$ הפיכה ליניארית

קיימת סביבה $U \subset W$ של a שעליו $V = f(U)$ מתקיים:

(i) $f|_U: U \rightarrow V$ חזקה.

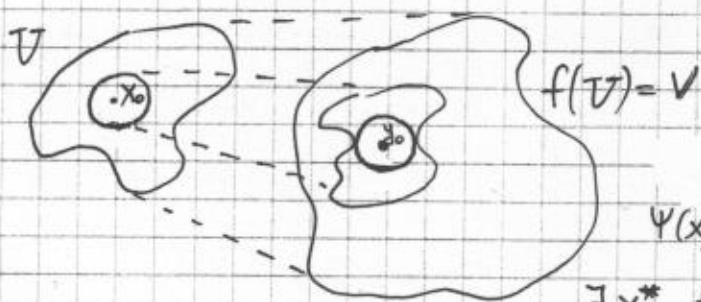
(ii) $f|_U$ פתוחה.

(iii) ההתאמה ההפוכה $g: V \rightarrow U$ הינה $C^1(V, \mathbb{R}^n)$.

בשינוי שלבים: $x_0 \in U, y_0 \in f(x_0)$ מתקין $r' > 0$ כך ש $B_{r'}(x_0) \subset U$

וסתכן $f(B_{r'}(x_0)) \supset B_{r'}(y_0)$

זה מראה שההתאמה פתוחה.



רסן הרגמל של הפונקציה $\psi(x) = |f(x) - y|^2$

מצאנו כי קיים מינימום: $\exists x^* f(x^*) = y$

ואם הוכחנו שזה אפשרי.

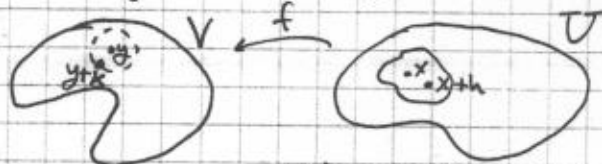
הוכחה (iii):

נניח $g: V \rightarrow U$ הפונקציה ההפוכה (קיומה נוסף מ (i) ו (ii) אנו יודעים כי

היא רציפה וכי V קשורה פתוחה (גמול). $(U; V$ קשורה הומומורפיה).

נקח $y = f(x) \in V$ ונבחר בקרבתו $0 < \epsilon$ סביבה של y כך ש $|k| < \epsilon \Rightarrow y+k \in V$

ונסמן $x+h = g(y+k)$



$f(x+h) = y+k = f(x) + k$

$k = f(x+h) - f(x) = (Df)_x h + r_x(h)$

$Lk = h + Lr_x(h) =$ וכן $L = (Df)_x^{-1}$ מסו

$= g(y+k) - g(y) + L(r_x(h))$

$(\Delta_y g)(k) - Lk = g(y+k) - g(y) - Lk = -L(r_x(h))$

$g(y+k) - g(y) = (\Delta_y g)(k)$

יהי $\epsilon > 0$ נתון $|h|$ מספיק קטן כדי להבטיח כי $|h|$ מספיק קטן

כדי $|r_x(h)| < \epsilon |h|$ נניח $|r_x(h)| < \epsilon |h|$ נניח $|r_x(h)| < \epsilon |h|$

שזה קול רציפה של הפונקציה g .

$$|L r_x(h)| \leq |L| |r_x(h)| \leq |L| \varepsilon |h| \leq \varepsilon |L| \frac{|h|}{2\lambda} \quad \text{כי}$$

(*) בהוכחה של (i) הניחו הקובץ:

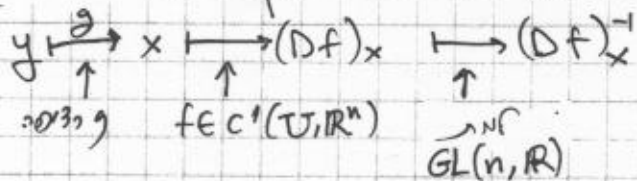
$$(*) \quad |f(x+h) - f(x)| \geq 2\lambda |h|$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|L r_x(h)|}{|h|} = 0 \quad \text{נסק אפוא כי}$$

כך נהיה לנו סתירה ונסיים.

הוכחנו כי g פונקציה ליניארית $\rightarrow$ y ונרמז N $\rightarrow$ $(Dg)_y = L = (Df)_x^{-1}$

אז ההדדיות $(Df)_x^{-1} \rightarrow y$ היא ההכנה של g פונקציה:



נזכר דבריה אלו היא. (iii) $\square$

3. משפט הפונקציה הפנימית

המשפט הוא מסקנה של משפט הקובץ.

במובן: המשפט: $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ נתון $a \in U$ נקודה $a \in U$ כזו

$$(Df)_a \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \text{rank}(Df)_a = m \quad (\text{מקסימלי})$$

$$\text{rank } L = \dim L(\mathbb{R}^n) = \text{מספר מקסימלי של וקטורים בלינארית} \quad L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

קורה כי אם f היא a $m \geq n$.

אם $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ והיא ליניארית בנקודה של U נאמר כי f מאזן

משפט: פונקציה ליניארית $\rightarrow$ נתון פתרון

הוכחה: אם $m = n$ המשפט נכון כחלק ממשפט הפונקציה הפנימית.

נניח אפוא כי $n < m$ ונסמן $m - n = k > 0$. יהי $a \in U$ כיוון שכל ϕ הפונה

$$\text{rank}(Df)_a = m \quad \text{כי} \quad \dim \ker(Df)_a = k \quad (\text{מחר בסיס } \mathbb{R}^n \text{ נבחר}$$

$$N = \ker(Df)_a \quad \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m\} \text{ טור } \{u_1, \dots, u_k\} \text{ בסיס}$$

$$(\mathbb{R}^n = N \oplus M) \quad M = \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\} \quad \text{י'}$$

$$\dim M = m \quad S = (Df)_a|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

S הוא איזומורפיזם ליניארי.

יהי $T : \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ האפייסור ההפוך.

$$g(y) = f(a + Ty) \quad \text{י' } g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{פונקציה}$$

$$(g(0) = f(a))$$

$$y \mapsto a + Ty \xrightarrow{f} g(y)$$

($\mathbb{R}^m$ מרחב וקטורי, $a \in \mathbb{R}^m$, $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ מטריצה, $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה)

$(Dg)_0(y) = (Df)_a \circ T(y) = \underbrace{DT}_I y = y$ וקיים: $y \in \mathbb{R}^m$

$$(Dg)_0 = I_{\mathbb{R}^m} \leftarrow$$

קטעו $g \in C^1(W, \mathbb{R}^m)$ ו W סביבה של a אם $(Dg)_0 = I_{\mathbb{R}^m} \neq 0$

אם U ו V סביבות של a ו $f(a) \in V$ אז $f(U) \subset V$

$g: U \rightarrow V$, $\mathbb{R}^m \supset V_1 = g(U)$ כך ש $g(U) \subset V_1$

הינה $C^1(U, \mathbb{R}^m)$ הפונקציה g פשוטה ו V פשוטה

אז $f(U) \subset V$ ומכאן $f(a) \in V$

(משפט)

4. משפט נקודת קסם

המשפט: יהיה (X, d) מרחב מטרי. נניח ש $f: X \rightarrow X$ פונקציה.

(המשפט) יהיה f פונקציה ש $f(x) = x$ לכל $x \in X$.

המשפט: פונקציה $f: X \rightarrow X$ כזו ש X מרחב מטרי (עם מטריצה d) נקראת פונקציה

היא פונקציה איזומורפית אם קיים $0 < c < 1$ כזה ש $d(f(x), f(x')) < c d(x, x')$

אם $x, x' \in X$.

נקודה $p \in X$ היא נקודת קסם של f אם $f(p) = p$

המשפט:

יהי (X, d) מרחב מטרי שלם (א.י.) $f: X \rightarrow X$ פונקציה ש $f(x) = x$ לכל $x \in X$

יהיה $X \ni p$

המשפט: אם $X \ni p$ נקודת קסם של f אז $d(f(x), p) < c d(x, p)$ לכל $x \in X$

ולכן x אינה נקודת קסם אלא אם כן $x = p$

היה $X \ni x_0$ כלשהו. נגדיר סדרה $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ באינדוקציה: $x_0 = x_0$, $x_1 = f(x_0)$ וכו'.

$x_{n+1} = f(x_n)$ (ניקח מסלול של f ב x_0)

יהי $d(x_0, x_1) = d(x_0, f(x_0)) = d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1)$

$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq c d(x_1, x_0) = c d(x_1, x_0) = c d(x_1, x_0)$

$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq c d(x_n, x_{n-1}) \leq c \cdot c^{n-1} d(x_1, x_0) = c^n d(x_1, x_0)$

ולכן הסדרה $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא סדרה קוסי

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} c^i d < \frac{c^n d}{1-c}$$

$m > n$

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

לפי ההצגה (X, d) של X יש

$$d(p) = p$$

$$\varphi(p) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p$$

כלומר $\varphi(p) = p$

(גל) 

φ מוגדרת על ידי