25.11.2000
תרגול מס' 4

חדו"א מתקדם ב

משפט לגרנג'

תהי $f:U\to\mathbb{R}$ ($U\subseteq\mathbb{R}^n$) דיפרנציאבילית ב-U קמורה. אז:

לכל $a,b\in U$ קיים $\xi\in U$ כך ש- $\langle\nabla f(\xi),b-a\rangle=f(b)-f(a)$.

(U קמורה בשביל שלכל $a,b\in U$ יתקיים $[a,b]\subseteq U$)

הוכחה - $\gamma(t)=(1-t)a+tb$, $\gamma:[0,1]\to U$ כי U קמורה. נגדיר $g(t)=f\circ\gamma(t)$. g גזירה כהרכבה של פ' גזירות (כלל השרשרת).

$$\gamma'(t)=b-a \Rightarrow g'(t)=\frac{\partial g}{\partial t}(t_0)=Df(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)=\langle\nabla f(\gamma(t_0)),b-a\rangle$$

ומשפט לגרנג' בחד-ממד קיים $0<t_0<1$ כך ש- $g(1)-g(0)=g'(t_0)$

ולכן נסמן $\xi=\gamma(t_0)\in U$ ונקבל $\Rightarrow f(b)-f(a)=\langle\nabla f(\gamma(t_0)),b-a\rangle$.

- במקרה ש- $f:U\to\mathbb{R}^m$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ קמור. נקבל:

$$f(b)-f(a)=Df((1-t_0)a+t_0b)(b-a)$$

פיתוח טיילור

תהי $a\in\mathbb{R}^n$, B כדור פתוח סביב a. תהי $f:B\to\mathbb{R}$

עם (כל הנגזרות החלקיות מסדר עד n רציפות (מ- סדר n) בה כמה גזירות. פיתוח טיילור סביב a:

$$f(a+h)=f(a)+Df(a)h+\frac{1}{2}D^2f(a)h+\dots+\frac{1}{n!}D^nf(a)h+o(|h|^n)$$

כש- $D^2f(a)h=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i=\langle\nabla f(a),h\rangle$,

$$D^3f(a)h=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\,h_ih_j=\langle Hf(a)h,h\rangle.$$

כאשר ההסיאן של f בנק' a מוגדר כך: $(Hf(a))_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$

מגדירים באופן (אם הנגזרות החלקיות רציפות):

$$D^kf(a)=\sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n\dots\sum_{i_k=1}^n\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_k}$$

רעיון ההוכחה - יהי $h\in\mathbb{R}^n$ נגדיר את $g(t)=f(a+th)$

כפ' של t מספיק קטן היא C^n ולכן יש פיתוח טיילור

חד ממדי סביב 0: $g(1)=g(0)+g'(0)(1-0)+\dots+\frac{1}{n!}g^{(n)}(0)\cdot(1-0)^n+o(\dots)$

ואז יוצא (משימוש בכלל השרשרת) - $D^kf(a)h=g^{(k)}(0)$.

תרגיל - פתח את $f(x,y)=e^{-x}\sin y$ לפיתוח סדר 2 סביב

.(0,0)

פתרון- קרוב מסדר 0: $f(0,0)=0$.

קרוב מסדר 1: צריך: $f'(x)$, $f'(y)$: $\langle \nabla f(0,0), \binom{x}{y}\rangle$

$f'_y(0,0)=e^{-x}\cos y|_{(0,0)}=1$, $f'_x(0,0)=-e^{-x}\sin y|_{(0,0)}=0$

$\Rightarrow D^1 f(0,0)\binom{x}{y} = \overset{f'_x}{0}\cdot x + \overset{f'_y}{1}\cdot y$

קרוב מסדר 2: צריך, f''_{yy} , f''_{xx} , $f''_{xy}=f''_{yx}$.

$f''_{xy}(0,0)=-e^{-x}\cos y|_{(0,0)}=-1$, $f''_{xx}(0,0)=e^{-x}\sin y|_{(0,0)}=0$,

$f''_{yy}(0,0)=-e^{-x}\sin y|_{(0,0)}=0$

$\Rightarrow D^2 f(0,0)\binom{x}{y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)x\cdot y + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)yx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\cdot y^2 = -2xy$

סה"כ, קירוב מסדר 2:

$f(x,y)=f(0,0)+D^1f(0,0)\binom{x}{y}+\frac{1}{2}D^2 f(0,0)\binom{x}{y}+o(\sqrt{x^2+y^2}^2) = y - x\cdot y + o(x^2+y^2)$

חקירת נק' קיצון

תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, f פונק' $C^2(U)$.

הגדרה- נק' $x\in U$ היא נק' מקסימום (מינימום) מקומי אם קיים ε_x כך שלכל נק' $y\in B(x,\varepsilon_x)$ מתקיים $f(x)\ge f(y)$ ($f(y)\ge f(x)$).

• x היא אוכף אם לכל $\varepsilon>0$ יש כיוונים שבהם f עולה וכיוונים שבהם f יורדת.

טענה א'- בנק' מינימום / מקסימום מקומי $\nabla f=0$.

הוכחה- תהי $a\in U$ שבה $\nabla f(a)\neq 0$. צ"ל: a לא מינ'/מקס' מקומי.

$\nabla f(a)\neq 0$ ולכן קיים i כך ש- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\neq 0$. נגדיר $g(t)=f(a+te_i)$

(e_i- וקטור יחידה סטנדרטי ב-$\mathbb{R}^n$). $g'(0)=\langle\nabla f(a),e_i\rangle=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\neq 0$

$\Leftarrow$ נק' 0 עבור g היא לא קיצון מקומי. כלומר

לכל $\varepsilon>0$ קיימים $-\varepsilon<t_1,t_2<\varepsilon$ עבורם:

$f(a+t_1e_i)=g(t_1)<g(0)=f(a)<g(t_2)=f(a+t_2e_i)$

$B(a,\varepsilon)\ni a+t_1e_i, a+t_2e_i$. לכל כדור סביב a יש נק'

x שבה $f(x)$ גדולה מ- $f(a)$ ונק' y שבה

$f(y) < f(a)$ ⇐ זה לא מינ' ולא מקס' מקומי.

<u>מסקנה</u> - סה"כ נק' קיצון a מתקיים: $f(a+h)=f(a)+\langle Hf(a)h,h\rangle+o(|h|^2)$.

אם $\langle Hf(a)h,h\rangle > 0$ לכל $h\in\mathbb{R}^n$ ⇐ <u>מינ' מקומי</u> ⟺ כל

הע"ע חיוביים. Hf מוגדרת חיובית למעשה.

<u>אם</u> לכל $h\in\mathbb{R}^n$ $\langle Hf(a)h,h\rangle < 0$ אז מקיימת ש-a <u>מקס'</u>

<u>מקומי</u>. ⟺ כל הע"ע שליליים. Hf מוגדרת שלילית.

<u>פירוש</u> - קיימים h_1,h_2 כך ש: $\langle Hf(a)h_1,h_1\rangle > 0$! -

$\langle Hf(a)h_2,h_2\rangle < 0$. לפחות ע"ע אחד חיובי ואחד שלילי וכל

הע"ע שונים מ-0.

<u>שאר המקרים</u> לא ידוע. צריך קירוב מסדר גבוה יותר

כדי לקבוע.

<u>תרגיל</u> - מצאו ומיינו נק' קיצון של - $f(x,y)=x^2-y^2$.

<u>פתרון</u> - שלב א': $\nabla f=0$:

$$\begin{cases} f'_{(x)}=2x=0 \\ f'_{(y)}=-2y=0 \end{cases} \iff (x,y)=(0,0)$$

שלב ב': חישוב ההסיאן ב-$(0,0)$:

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \text{ע"ע } \pm 2 \Rightarrow \text{אוכף.}$$

<u>תרגיל 2</u> - $f(x,y)=x\cdot y-\frac{x^2}{3}-y^3$. שלב א': $\nabla f=0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=y-\frac{2}{3}x=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=x-3y^2=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0),\ (\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2}) \text{ נק' חשודות.}$$

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & -6y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$\det(Hf(0,0))=\lambda_1\cdot\lambda_2=-1 \Rightarrow$ שוני סימן. $\Rightarrow$ הע"ע $\Rightarrow$ אוכף.

$A=Hf(\frac{3}{4},\frac{1}{2})=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=1=\lambda_1\cdot\lambda_2 \Rightarrow$ שווי סימן.

$tr(A)=\lambda_1+\lambda_2=-3\frac{2}{3} \Rightarrow$ שליליים שניהם

וקיבלנו ש- $Hf(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$ מוגדרת שלילית ⇐ מקסימום.

שיטה למינימום כלליים יותר

קריטריון סילבסטר - $A=(a_{ij})$ מטריצה סימטרית, A_j מינור ראשי מסדר j. אז A חיובית $\det(A_j)>0 \iff$ מוגדרת חיובית

אם סימנים מתחלפים $\iff$ מוגדרת שלילית ((...))

משפט עזר - תהי A מטריצה סימטרית מוגדרת חיובית למחצה. כלומר $\langle Ah,h\rangle\geq 0$ וקיים h שונה מ-0 $\langle Ah,h\rangle=0$ ונגדיר $f(x)=\langle Ax,x\rangle$. אז: $f(x)=f(0)+\langle Ax,x\rangle$ הוא קירוב מסדר 2 סביב 0. $Hf(0)=A$. לכל x: $\langle Ax,x\rangle\geq 0=f(0)$ ולכן 0 נק' מינימום מקומית.

טענה - לכל $k\geq 2$ קיימת $g(x)=o(|x|^k)$ כך, ש- $f+g$ אין ל- $f+g$ אין נק' מינ' ב-0. נשים לב ש- $g(x)=o(|x|^k) \Rightarrow Hf+g(0)=Hf(0)=A$

כלומר אותו הסימן אך, 0 אינו נק' מינימום מקומי.

הוכחת הטענה - קיים h כך, ש- $0=\langle Ah,h\rangle$ נגדיר g בצורה הבאה: $g(x)=-|\langle x,h\rangle|^{k+1}$ (נקבע ונרמל $|h|=1$) אז:

$$|g(x)|=|\langle x,h\rangle|^{k+1} \overset{C-S}{\leq} |x|^{k+1}|h|^{k+1}=|x|^{k+1} \Rightarrow g(x)=o(|x|^k)$$

נוכיח ש-0 לא מינימום של $f+g$. יהי $\varepsilon>0$ אז: $\frac{\varepsilon}{2}h\in B(0,\varepsilon)$.

$$(f+g)\left(\frac{\varepsilon h}{2}\right)=f\left(\frac{\varepsilon h}{2}\right)+g\left(\frac{\varepsilon h}{2}\right)=\frac{\varepsilon^2}{4}\overbrace{\langle Ah,h\rangle}^{=0}-\left|\frac{\varepsilon}{2}\right|^k|\langle h,h\rangle|^{k+1}=$$

$$=-\left|\frac{\varepsilon}{2}\right|^k<0=f+g(0) \Rightarrow$$ 0 לא מינימום

קיצון מוחלט

תהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית $f:K\to\mathbb{R}$ פונק' $C^1(K) \Rightarrow$ רציפה ב-$K \Rightarrow$ כרציפה ב-$K \Rightarrow$ (משפט ויירשטראס) יש מינ' ומקס' מוחלטים.

איך מוצאים אותם? בתיכון זכרנו, חיפשנו את הנקודות החשודות, הוספנו קצוות ובדקנו ערכים. אותו דבר:

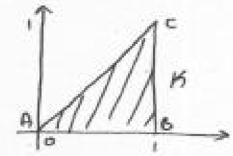
שלב א- חיפוש נק' קיצון. $\nabla f=0$. בתוך K.

שלב ב- בדיקה של השפה. (∂K)

שלב ג- השוואת ערכים.

פתרון - $f(x,y)=x\cdot y-\frac{x^2}{3}-y^3$. $K=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$.

$\nabla f=0$ רק ב- $T_1=(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$ פנימית.



שפה - $\partial K=AB\cup BC\cup CA$ נק' א' קצה של הצלע,

$C=(1,1)$, $B=(1,0)$, $A=(0,0)$. סוג ב': נק' פנימית בצלע

AB. $0\le x\le 1$ $AB=(x,0)$. $\varphi(t)=f(t,0)=-\frac{t^3}{3}$ $\Leftarrow$ $\varphi'(t)=-\frac{2t}{3}\neq 0$

לכל $0<t\le 1$ $\Leftarrow$ אין נק' פנימית ב- AB.

$0\le y\le 1$ $BC=(1,y)$. $\varphi_2(t)=f(1,t)=t-\frac{1}{3}-t^3$ $\Leftarrow$ $\varphi_2'(t)=1-3t^2=0$ נק' פנימית

נקודה - $t=\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\Leftarrow$ $T_2=(1,\sqrt{\frac{1}{3}})$.

$0\le x\le 1$ $AC=(x,x)$. $\varphi_3(t)=f(t,t)=\frac{2}{3}t^2-t^3$ $\Leftarrow$ $\varphi_3'(t)=\frac{4}{3}t-3t^2=0$ $\Leftarrow$ $(\frac{4}{9},\frac{4}{9})$

נק' קצה.

שלב ג: $f(1,1)=f(1,0)=-\frac{1}{3}$, $f(0,1)=0$, $f(\frac{4}{9},\frac{4}{9})=\frac{32}{729}$, $f(1,\sqrt{\frac{1}{3}})=\frac{2}{9\sqrt{3}}-\frac{1}{3}$,

$f(\frac{3}{4},\frac{1}{2})=\frac{1}{16}$ $\Leftarrow$ $f(1,1)=f(1,0)$ מינימום ו- $f(1,\sqrt{\frac{1}{3}})$

ערך מקסימום.