

המרה:

$$|A| = \max_{|X|=1} |Ax|$$

המרה 1: $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \supset GL(n, \mathbb{R})$ המרחב האליפטיים

המרה 2:

1. $G \ni A$ קיים $|Ax| \geq \alpha |x|$ כאשר $\alpha = |A^{-1}|^{-1}$
 2. $G \ni A$ $G \ni B$ $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \ni B$ כך $\rho = |B-A| < \alpha$

$$|B^{-1}| \leq \frac{1}{\alpha - \rho}$$

3. ההפוך $A \mapsto A^{-1}$ (המרה G-מרה)

$$\mathbb{R}^{n^2} \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow G \leftarrow \text{המרה פתוחה}$$

נניח G הוא קבוצת המרה: $A \mapsto \det A$ הינה רציפה

$$\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = G = \{A : \det A \neq 0\}$$

המרה 3: $G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$$

אם $G \ni B, A$

$$|B^{-1} - A^{-1}| \leq |B^{-1}| |A - B| |A^{-1}| \leq \frac{|A - B|}{(\alpha - \rho)\alpha} = \frac{|A - B|}{(1 - \frac{\rho}{\alpha})\alpha^2} \quad \left(\frac{\rho}{\alpha} < 1\right)$$

קיימת פונקציה f (היא פונקציה רציפה) $\square$

$$\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \supset G \times G \rightarrow G$$

המרה

המרה 2: G עם טופולוגיה τ של $\mathbb{R}^n$ וההפוך הינה פונקציה רציפה וקטורית.

2. המרה הפונקציונלית

המרה 1:

1. אם $\omega: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה בינימית כאשר X, Y מרחבים נורמטיים

$$h(\cdot): Z \rightarrow X \quad ! \quad w(x, y) = x \cdot y \quad ! \quad \mathbb{R}^n = Y = X$$

$$g(\cdot): Z \rightarrow Y \quad (כאשר Z מרחב נורמטי) \quad \text{הינן פונקציות זיכרונותיות}$$

$$(D\omega)_{z_0}(z) = w((Dg)_{z_0}(z), b) + w(a, (Dh)_{z_0}(z))$$

$$(Dw)_{(a,b)}(x, y) = w(x, b) + w(a, y)$$

הוכחה:

הוכחה: w פונקציה ω פונקציונלית

$$g(z), h(z) = \omega(t)$$

9

2. יהי $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ מסלול באזור $X = \mathbb{R}^n$ שיהיה חלקי

(כלומר $\gamma'(t)$ קיים בכל t ויש פונקציה רציפה).

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t) dt \Rightarrow |\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

סעיף של הערכה: $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$



משפט הממוקד הערכה

יהי $\omega \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ פונקציה $C^1(\omega, \mathbb{R}^n)$ ויהי $a \in \omega$ נקודה
 $(Df)_a$ הפעם נוסח $b = f(a)$ קיים ω סביבת a וסקימה

V של b קיים: (i) $f|_U$ חזקה

(ii) $f|_U = V$ היתה פונקציה פונקציה

(iii) היתה פונקציה $g: V \rightarrow U$ היתה $C^1(V, \mathbb{R}^n)$ (בידוריות)

אז $(Df)_a = id$ on $\mathbb{R}^n$ (אז $\mathbb{R}^n$ ומהקיים)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \\ & \xrightarrow{f} & \\ \omega & & \end{array}$$

$$f(a) + (Df)_a h \sim f(a+h)$$

$$(Df)_a h \sim (df)_a(h)$$

דוגמה 13

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \sin \frac{1}{t} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

פונקציה שלישית בעל נקודה אופטימלית $\rightarrow$ חסומה אז בעל סביבה של אפס f
 ונגזרת חזקה. נגזרת $f'(t) = 1 + 4t \sin \frac{1}{t} - 2 \cos \frac{1}{t}$ אז רציפה $\Leftarrow$ המעלה לא חזקה

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

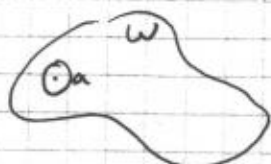
$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

קיים $\rightarrow$ הנגזרת החזקה $\rightarrow$ חזקה $\rightarrow$ הפונקציה f בידוריות

$$C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \ni f$$

הפונקציה של בעל נקודה חזקה.

הוכחה



$$A = (Df)_a$$

$$\alpha = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \text{ אז } \lambda = \frac{1}{\alpha} \text{ אז } \lambda = \frac{1}{\alpha} \text{ אז } \lambda = \frac{1}{\alpha}$$

$$|Df_x - A| \leq \lambda \text{ אז } B_r(a) \subset \omega \text{ אז } x \in B_r(a) \text{ אז } x \in B_r(a)$$

$$B_r(a) = U \text{ אז } V = f(U) \text{ אז } V = f(U) \text{ אז } V = f(U)$$

(ii) $f|_U : U \rightarrow V$ הפונקציה המוגבלת (restriction) $V = f(U)$ קטורה פתוחה U היא פתוחה.

(iii) $C^1(V, \mathbb{R}^n) \ni g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ הפונקציה g היא פתוחה.

$$(Dg)_f(x) = (Df)_x^{-1}$$

$$B_r(a) = U \ni x, x+h$$

לפי (i) $\rightarrow$ הפונקציה

$$|(Af)_x h - Ah| = |f(x+h) - f(x)| \leq \frac{1}{4} |Ah|$$

הפונקציה



$$\varphi(t) = f(x+th) - tAh$$

הפונקציה φ היא פונקציה רציפה.

$$\varphi'(t) = (Df)_{x+th} h - Ah = ((Df)_{x+th} - A)h. \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$|\varphi'(t)| \leq |(Df)_{x+th} - A| |h| \leq \lambda |h| = \frac{\alpha |h|}{4} \leq \frac{1}{4} |Ah| \quad (*)$$

$$(GL(n, \mathbb{R}) \text{ הפונקציה } |Ah| \geq \alpha |h|) \quad \square$$

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = |f(x+h) - Ah - f(x)| = \left| \int_0^1 \varphi'(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |\varphi'(t)| dt \leq \frac{1}{4} |Ah|$$

(*) $\square$

הפונקציה φ היא פונקציה רציפה.

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\geq |Ah| - |f(x+h) - f(x) - Ah| \geq |Ah| - \frac{1}{4} |Ah| = \frac{3}{4} |Ah| \geq \\ &\geq \frac{3\alpha |h|}{4 \cdot 4} = 3\lambda |h| > 2\lambda |h| \end{aligned}$$

$$\rightarrow |f(x+h) - f(x)| > 2\lambda |h| \quad h \neq 0 \quad (**)$$

הפונקציה $f|_U$ היא פונקציה פתוחה.

(ii) $\rightarrow$ הפונקציה

הפונקציה $f|_U : U \rightarrow V$ היא פונקציה פתוחה.

הפונקציה $f|_U : U \rightarrow V$ היא פונקציה פתוחה. $U \supset B_{r'}(x_0)$ ו- $0 < r' < r$ ו- $x_0 \in U$. $f(x_0) = y_0 \in V$.

הפונקציה $f|_U : U \rightarrow V$ היא פונקציה פתוחה. $B_{\lambda r'}(y_0) \subset f(B_r(x_0))$.

$$\psi(x) = |y - f(x)|^2 \quad \text{הפונקציה } \psi \text{ היא פונקציה רציפה.} \quad B_{\lambda r'}(y_0) \ni y$$

$$\psi(x) = \omega(y - f(x), y - f(x))_{y_0} \quad \psi(x) = (y - f(x)) / (y - f(x))$$

הפונקציה ψ היא פונקציה רציפה.

$$\psi(x_0) = |y - f(x_0)|^2 = |y - y_0|^2 \leq \lambda^2 r'^2$$

1.

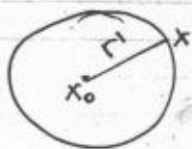
2. $|x - x_0| < r'$ $x \in B_{r'}(x_0)$ x הוא נקודה כלשהי בתוך $B_{r'}(x_0)$.

$$\sqrt{\psi(x)} = |f(x) - y| > |f(x) - y| + |f(x_0) - y| - \lambda r' \geq |f(x) - f(x_0)| - \lambda r' >$$

$$> 2\lambda |x - x_0| - \lambda r' = \lambda r'$$

(*) $\square$

$$\psi(x) > \lambda^2 r'^2 \text{ ו- } \psi(x) > \lambda^2 r'^2$$



כיוון ψ פונקציה רציפה על קטע החתך הקטן ביותר

$B_r(x_0)$ יש לה גם מינימום אחד (קיצר 15 אי"ש)

המשפט.

היה x^* נקודה מינימום של $|x^* - x_0| < r$

כיוון ψ פונקציה רציפה על x^* נקודה של יציאה מינימום (פונקציה)

$$\begin{aligned} 0 &= (D\psi)_{x^*}(h) = \omega(D(y-f(x))_{x^*}h, f(x^*)-y) + \\ &\quad + \omega(f(x^*)-y, D(y-f(x))_{x^*}h) = \\ &= -2\omega((Df)_{x^*}h, f(x^*)-y) \end{aligned}$$

לכן $(Df)_{x^*}$ אפסור הנש"ל / נש"ל

$$f(x^*) - y = 0 \Leftrightarrow R^n = (Df)_{x^*} \perp f(x^*) - y \quad \text{לכן מקטור}$$

$$f(x^*) = y \quad \Leftarrow$$