

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה, $V = f(U)$ קטע במרחב (open set)

יש קיימנג סונקציה הפוכה $g: V \rightarrow U$

פונקציה f היא בייגאנציה f^{-1} אם $id = g \circ f$ $a \in U$ $id = f \circ g$

אם $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה, $(Df)_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $id = (D(id))_a = (Dg)_a \circ (Df)_a$

כל n, m $n \leq m$ $m \leq n$ $n = m$

הגדרה: סונקציה רציפה וחדה הפוכה רציפה נקראת הומומורפיזם

הבהיה: $f: X \rightarrow Y$ רציפה אלמ f קטע במרחב $V = f^{-1}(U)$ $U \subset Y$ $f^{-1}(U)$ היא קטע במרחב X

אם $g: Y \rightarrow X$ היא סונקציה הפוכה (פונקציה f חתך g רציפה)

אם $f: X \rightarrow Y$ פונקציה $g^{-1}(U) = f^{-1}(U) = V$ f הומומורפיזם f קטע במרחב V f קטע במרחב V

למאנה: אם $\omega: X \oplus Y \rightarrow W$ סונקציה $\omega(x, y) = \omega(x, b) + \omega(a, y)$ $(D\omega)_{(a,b)}(x, y) = \omega(x, b) + \omega(a, y)$

אם $h: Z \rightarrow Y$, $g: Z \rightarrow X$ סונקציה רציפה וחדה, $\omega(g(z), h(z))$ $\varphi(z) = \omega(g(z), h(z))$

אם $(Dg)_{z_0}(z) = \omega((Dg)_{z_0}(z), h(z_0)) + \omega(g(z_0), (Dh)_{z_0}(z))$

הוכחה: $\theta_1(x) = (x, 0)$, $\theta_2(y) = (0, y)$

$(D\omega)_{(a,b)}(x, y) = (D\omega)_{(a,b)}(\theta_1(x) + \theta_2(y)) = (D\omega)_{(a,b)}^1(x) + (D\omega)_{(a,b)}^2(y) = \omega(x, b) + \omega(a, y)$

אם ω פונקציה רציפה וחדה $\omega(x, y) = x \cdot y$

למאנה: מקרה ספציפי של הומומורפיזם $\omega(x, y) = x \cdot y$

$$\omega(x, y) = x \cdot y \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$(D\omega)_{(a,b)}(x, y) = x \cdot b + a \cdot y$$

משפט:

אם $U \subset X \oplus Y \xrightarrow{f} W$ קיימנג $(Df)^1$ ו- $(Df)^2$ קיימנג, U קיימנג

$$(Df)_{(a,x)}^1 = (Df)_a^1 + (Df)_b^2$$

מקרה $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}}_n$ המרחב $\mathbb{R}^n$ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחדה

אם U קיימנג U קיימנג U קיימנג U קיימנג

$\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}$ U קיימנג U קיימנג U קיימנג U קיימנג

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \sin(\frac{1}{t}) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

הערה: $C^1(U, \mathbb{R}^m)$ הולך להיות $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ - ה- $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{R}^m$ הם וקטוריות

כך $(Df)_a \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ $a \mapsto (Df)_a$ $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ $a \in U$

$C^1(U)$ $m=1$ $\mathbb{R}$

$$f \in C^1(U) \iff f \text{ מתחילה ונגזרתה מתחילה}$$

משפט 6.6

$(n \geq 1) : C^n(U)$

$\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $f \in C^1(U)$ $a \in U$ $(Df)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $a \mapsto (Df)_a$

$(D^2f)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ $a \mapsto (D^2f)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ $a \mapsto (D^2f)_a$

$$[(D(Df))_a(x)](y) = [(D^2f)_a(x)](y)$$

$(D^2f)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ $a \mapsto (D^2f)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ $a \mapsto (D^2f)_a$

$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \cong \text{BL}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $\omega: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

הערה: $C^2(U)$ $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $f \in C^2(U)$ $a \in U$ $(D^2f)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ $a \mapsto (D^2f)_a$

$\omega: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $a \mapsto (D^2f)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ $a \mapsto (D^2f)_a$

$C^k(U)$ $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in U$ $(D^k f)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}))$ $a \mapsto (D^k f)_a$

$$\left(\frac{\partial^k f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \right)$$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \mathbb{R}^n = \mathbb{R} e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R} e_n$$

$$(Df)_a(x) = (\nabla f)(a) \cdot x = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$F: a \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

$$U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

ה- $(Df)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $a \mapsto (Df)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $a \mapsto (Df)_a$

$$(D^2f)_a = (Df)_a = T$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$$T \cdot e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \end{pmatrix}$$

ה- $(D^2f)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ $a \mapsto (D^2f)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ $a \mapsto (D^2f)_a$

ה- $(D^2f)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ $a \mapsto (D^2f)_a$ $\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ $a \mapsto (D^2f)_a$

משפט פאן: אם $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n \supset U$, אז f היא פונקציה קונקבה אם ורק אם $f'' \leq 0$.

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \text{ כל } i, j$$

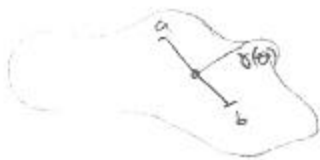
7. משפט הממוצע

משפט: $a, b \in U$, $\mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, אז

יש נקודה θ הנמצאת על הקו המחבר את a ו- b כך ש- $\theta \in U$, ו- $0 \leq t \leq 1$,

$$\theta(t) = (1-t)a + tb \in U$$

אז $f(b) - f(a) = (Df)_{\theta(t)}(b-a)$, כלומר $0 < \theta < 1$, קיים θ כזה ש-



$$\gamma(t) = f \circ \theta(t) \quad \text{הרכבה: תחילה}$$

$$\gamma'(t) = (Df)_{\theta(t)}(\theta'(t))$$

$$\gamma(1) - \gamma(0) = f(b) - f(a) = \gamma'(t) = (Df)_{\theta(t)}(b-a)$$

$$\theta'(t) = -a + b = b - a$$

משפט: אם U היא תחום קונקב, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, אז $|Df| \leq M$, כלומר f היא פונקציה קונקבה.

אם f היא פונקציה קונקבה, אז $|Df| \leq M$, כלומר f היא פונקציה קונקבה.

$$|f(a) - f(b)| \leq M|b-a|$$

אם $f \in C^1(U)$, אז $|Df| \leq M$, כלומר f היא פונקציה קונקבה.

$$M = \max \{ |Df| : a \in U \}$$

אם f היא פונקציה קונקבה, אז $|Df| \leq M$, כלומר f היא פונקציה קונקבה.

משפט: אם $f = \text{const}$, אז $(Df)_a = 0$, כלומר f היא פונקציה קונקבה.

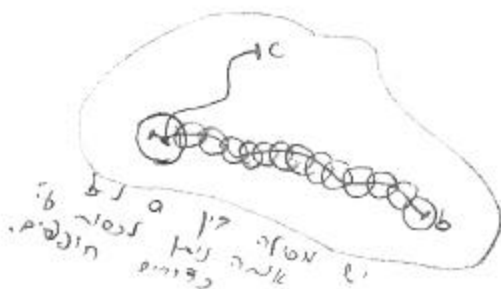
המשפט הממוצע הממוצע, כלומר f היא פונקציה קונקבה.

המשפט הממוצע, כלומר f היא פונקציה קונקבה.

אם $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, אז f היא פונקציה קונקבה.

אם $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, אז f היא פונקציה קונקבה.

אם $(Df)_a = 0$, אז f היא פונקציה קונקבה.



פרק III - תורת הפונקציות ההפוכה:

Inverse function theorem

התחלה: $GL(n, \mathbb{R})$

התחלה: $GL(n, \mathbb{R})$ היא כל המטריצות הפיכות $n \times n$ מעל $\mathbb{R}$.

המטריצה A היא הפיכה אם ורק אם $\det(A) \neq 0$.

יש תכונה כי $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ לכל $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$.

$$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$$

לכן: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ (נראה, לא צריך להוכיח).

$$|Ax| \geq \alpha |x| \quad \text{כאשר } x \in \mathbb{R}^n$$

אם $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ו- $B \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ מקיים $\|B - A\| < \alpha$

$$|B^{-1}| \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \quad \text{כאשר } B \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ ו-} \alpha = |A^{-1}|^{-1}$$

(3) ההפוכה $A \mapsto A^{-1}$ היא פונקציה גלולה.

$$|x| = |A^{-1}Ax| \leq |A^{-1}| |Ax| = \frac{1}{\alpha} |Ax| \quad \text{(נכתב: 1)}$$

$$|Ax| \geq \alpha |x|$$

$$|Bx| + \beta |x| \geq |Bx| + |(B-A)x| \geq |Ax| \geq \alpha |x| \quad (2)$$

$$|Bx| \geq (\alpha - \beta) |x| \quad \text{כאשר } \beta < \alpha$$

נבחר B קרובה ל- A (כלומר $\|B - A\| < \alpha$).

$$|y| = |BB^{-1}y| \geq (\alpha - \beta) |B^{-1}y| \quad \text{כאשר } Bx = y$$

$$|B^{-1}y| \leq \frac{1}{\alpha - \beta} |y|$$

(אין צורך להוכיח כי $y \in \mathbb{R}^n$ עבור כל $x \in \mathbb{R}^n$).

יש לזכור כי $y \in \mathbb{R}^n$.