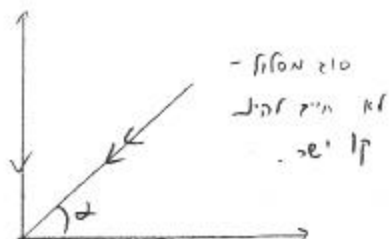


$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

א.3. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r^2 \sin \alpha \cos \alpha}{r} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} r \sin \alpha \cos \alpha$



האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

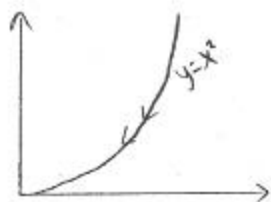
האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(0, y) = 0$$

$$f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{r \cos \alpha} = \frac{r \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$



$$f(x, x^2) = \frac{x^2}{x} = x \rightarrow 0$$

האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

$$y = 0, x \neq 0$$

$$\left| \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |y| \rightarrow 0$$

$$x = 0$$

האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

$$C_0 = \{ \{x_n\} \in \mathbb{R}^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \}$$

האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

$$\| \{x_n\} \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq \infty} |x_i|$$

האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

$$C_{0,0} = \{ \{x_n\}_{n=1}^\infty : x_i = 0 \text{ for } i \geq N \text{ for some } N \} \subseteq C_0$$

האם הגרעין יציב ב- $(0, 0)$?

$$x^M - x^N = (0, \dots, 0, \frac{1}{M+1}, \dots, \frac{1}{M}, 0, 0, \dots)$$

$$\|x^M - x^N\| = \max \{ \dots \} = \frac{1}{M+1}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) = x$$

: 13/10/13

$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$... $G \in D$... $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$...

$$\frac{|f(x+h) - f(x) - Lh|}{|h|} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

$$f(x+h) = f(x) + Lh + o(|h|)$$

$$Df(a) = L$$

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$f(x) = Ax: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$Df(a) = A \quad a \in \mathbb{R}^n$$

$$A(x+h) = Ax + Ah = Df(a)h$$

$$F(A) = A^2$$

$$f: \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + xh + hx + h^2 - x^2 = \underbrace{xh + hx}_{\text{order 2}} + \underbrace{h^2}_{\text{order 3}}$$

$$Df(x) \cdot h = x \cdot h + h \cdot x$$

$$Df(x) = x \cdot + \cdot x \Rightarrow x \rightarrow \text{...}$$

: 13/10/13

: 13/10/13

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$...

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(a+th) = Df(a) \cdot h$$

...

$$f(a+th) = f(a) + Df(a) \cdot h + o(|h|)$$

...

$a \in \mathbb{R}^n \rightarrow$...

$$Df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) := \nabla f(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = Df(a) \cdot h = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

$(0,0) \rightarrow 00, 3, 101 \text{ f}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad - p^{(1)}$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |Ax| \quad \text{7.321} \quad A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad \text{7.322}$$

ענין אר' של העצמה - נין

$$|Ax| = 0 \quad \Leftarrow \quad (x \in \ker A) \quad Ax = 0 \quad \text{d/k } -I \text{ op p. 4}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|A(x+t)| - |Ax|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} |A_t| = \underbrace{\text{sign}(t)}_{\substack{\text{! } t > 0 \\ \text{! } t < 0}} \cdot |A_t| \quad -5 \text{EI}$$

$x \in \ker A$ $\Rightarrow$ $Ax = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 0$ $\forall x \in \ker A$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|A(x+th)|^2 - |Ax|^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|Ax+th|^2 - |Ax|^2}{t[|Ax+th| + |Ax|]} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\langle Ax, Ah \rangle + o(t)}{t[|Ax+th| + |Ax|]} = \frac{2\langle Ax, Ah \rangle}{2|Ax|} = \frac{\langle Ax, Ah \rangle}{|Ax|}$$

$(\lambda > 0) \quad f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \quad \lambda \in \mathbb{R}^n \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{and } f(0) = 0$

...

$t > 0, \quad D_f(0) \quad \text{...}$

$t f(h) = f(th) = f(0) + t D_f(0) \cdot h + o(|th| \cdot |h|) = t D_f(0) \cdot h + o(|h| \cdot |h|)$

$t \rightarrow 0$

$F(h) = D_f(0) \cdot h + o(|h|)$

$f(h) = D_f(0) \cdot h$

$0 \leq t \leq 1$

$f \in \dots$

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

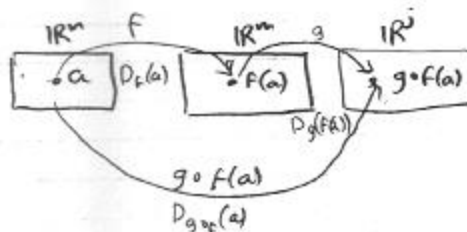
$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$a \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(a) \in \mathbb{R}^m$

$f(a) \in \mathbb{R}^m \rightarrow g(f(a)) \in \mathbb{R}^j$

$a \rightarrow g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^j$

$D_{g \circ f}(a) = D_g(f(a)) \cdot D_f(a)$



$x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

$\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$

$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$

$\theta = \arctan \frac{y}{x} \pm \pi$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -y \\ \sin \theta & x \end{pmatrix}$

$\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial f}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \cos \theta & -y \\ \sin \theta & x \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta, -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

$a \in D \rightarrow \text{הפונקציה } f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$D_f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \Rightarrow a \text{ נק' } f \text{ ב- } \underline{\text{גורמים}}$$

$\delta'(0) = h \in \mathbb{R}^n, \delta(0) = a$ - כל $\gamma: [-1, 1] \rightarrow D$ מסלול ב- D : $\gamma(0) = a$ ו- $\gamma'(0) = h$



$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = \underbrace{D_f}_{\text{הנגזרת}}(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{\text{הוקטור}} \Big|_{t=0} \quad \text{ע}$$

$f(a) = f(\gamma(0))$

$$\text{ע } D_f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \underbrace{\langle \nabla f(a), h \rangle}_{\text{המכפלה הפנימית}} \leq \underbrace{|\nabla f(a)|}_{\text{הנורמה}} |h|$$

הוקטור h הוא כיוון של עלייה של f ב- a

$$\lambda \cdot \nabla f(a) = h \quad : \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{קיי}$$

כיוון ההתאמה הכי מהיר (הוא) כיוון הגורמים

$$|\langle \nabla f(a), h \rangle| \rightarrow \begin{cases} < |\nabla f(a)| |h|, & \nabla f(a) \perp h \\ = |\nabla f(a)| |h|, & h = \lambda \nabla f(a) \text{ - מסלול} \end{cases}$$

* $f(\gamma(t)) = c$ אם γ מסלול ב- D קו עזר, c ב- $\mathbb{R}$

(המשפט) נראה שיש מסלול מהיר (קווי עזר)

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

$\downarrow$
הנגזרת של f ב- a

הנגזרת מהירה בקווי עזר

$$\nabla f = \text{וקטור המשיך}$$

קווי עזר $\Leftarrow$ קווי המשיך המשיך ב- f הפונקציה

משיך משיך $\Leftarrow$ קווי המשיך ב- f משיך

קבוצה קמורה

D קבוצה קמורה אם לכל $x, y \in D$: $[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset D$

במרחב $\mathbb{R}^n$: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\} = B(0, r)$ היא קבוצה קמורה

$$|(1-t)x + ty| \leq (1-t)|x| + t|y| \quad \text{ע} \quad : (0 \leq t \leq 1) \quad x, y \in B(0, r)$$

$\downarrow$
המשפט

$$\text{ע } (1-t)|x| + t|y| < (1-t)r + tr = r$$

$0 \leq t \leq 1$ כל $(1-t)x + ty \in B(0, r)$, כל