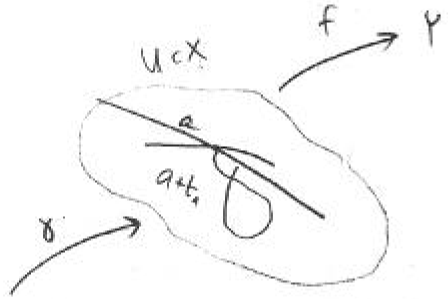
17.11.08

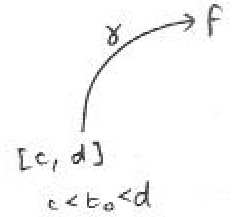
$f:X\to Y$ במרחבים מטריים היא רציפה במידה שווה אם

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $d(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon \Leftarrow d(x_1,x_2)<\delta$. דוגמה: $f(x)=x^2$

: אם X קומפקטית, $f:X\to Y$ רציפה, אז היא רציפה במ"ש.

הדיפרנציאל - המשך:





X,Y מרחבים נורמיים.

$\gamma(t_0)\in U$

$f\circ\gamma:[c,d]\longrightarrow Y$

$\gamma[c,d]\subset U$

אם יש דיפרנציאביליות של γ ו-f אז-

$$D(f\circ\gamma)_{t_0}(t)=(Df)_{\gamma(t_0)}\circ\gamma'(t_0)$$

$$\gamma_1'(t_0)=\gamma_2'(t_0)$$

$\Leftarrow$ עבור פונקציה רציפה ההרכבה שומרת על דיפרנציאביליות.

מקרה מיוחד הוא כאשר המסילה היא ישר בכיוון $x\in X$:

$$\gamma(t)=a+tx\quad;\quad\gamma'(t_0)=x.$$

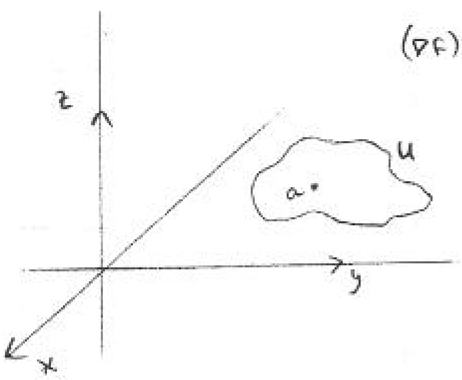
כאשר: $Y=\mathbb{R}$: $X=\mathbb{R}^n$: $x=e_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow j$ $\quad(\mathbb{R}^m=\mathbb{R}\ :\ m=1)$

$$f(a+te_j)$$

$$\gamma(t)=a+te_j\quad,\ \gamma(0)=a$$

$$(Df)_a(e_j)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\lim_{t\to0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}=(\nabla f)(a)\,e_j=\nabla f(a)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

כאשר $(\nabla f)(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$



$m=1$
: $n=2$

* h וקטור יחידה ב- $\mathbb{R}^n$ אז- $\nabla f(a)\cdot h>0$ אז f עולה בכיוון h.

הגידול המקסימלי הוא בכיוון $\frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$.

(הגידול בסימן שלילי המקסימלי בכיוון $\frac{-\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$.)

* נקודת קיצון $\nabla f(a)=0$

וכן למישור המשיק בנקודה a

* הוקטור $\nabla f(a)$ אורתוגונלי ל"משטח" Y - $S=\{x: f(x)=f(a)\}$.

אם γ מסילה החלה ב-S עם t_0 שווה ב-S אז -

$$0=\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)=(\nabla f)(a)\cdot\gamma'(t_0)$$

$$\left(\forall t:\ \gamma(t)\in S\ -\ f\circ\gamma(t)\equiv f(a)\right)$$

⇐ ניצב למישור (לגרף הפונקציה)

ומצביע אל המישור כך

שהמכפלה הסקלרית עם כל וקטור במישור ניצב לגרדיאנט.

לכן הוא גם אורתוגונלי למישור המשיק.

: $(Df)_a\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ $\qquad (\nabla f)(a)=grad(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$

והגדרה נוספת - $\qquad (Df(a))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\nabla f)(a)\cdot X$

כלומר, ניתן לזהות לגרדיאנט כמכפלה סקלרית.

אזי נקודות מקיימות את המשוואה? - $f(a+x)=f(a)+(Df)_a(x)$

⇐ $(x_1,\dots,x_n,f(x))$ - הופכות גוף קואורדינטה.

אם, $U\subset X \xrightarrow{f} Y\oplus Z$ פתוח, X,Y,Z מרחבים נורמיים, $f=(f_1,f_2)$

כאן הנוסחה הוא יותר ממימד אחד.

טענה: f דיפרנציאבילית ב-a אם ורק אם f_1,f_2 דיפרנציאביליות ב-a וקיים -

$$(Df)_a(x)=\left((Df_1)_a(x),\ (Df_2)_a(x)\right)$$

הוכחה: יהיו $\theta_1:Y\to Y\oplus Z$ $\qquad \theta_1(y)=(y,0)$ - העתקה לינארית

$\theta_2:Z\to Y\oplus Z$ $\qquad \theta_2(z)=(0,z)$

ובהינה - $\pi_1:Y\oplus Z\to Y$ $\qquad \pi_1(y,z)=y$

$\pi_2:Y\oplus Z\to Z$ $\qquad \pi_2(y,z)=z$ $\Big\}$ ההטלות

אם קיימים הדיפר' $(Df_i)_a$ - $i=1,2$: $\qquad f=\theta_1\circ f_1+\theta_2\circ f_2$

$\theta_2\circ f_2(x)=(0,f_2(x))$ $\qquad \theta_1\circ f_1(x)=(f_1(x),0)$

$f(x)=(f_1(x),0)+(0,f_2(x))=(f_1(x_0),f_2(x))$, עם כלל השרשרת -

$$(Df)_a(x)=D(\theta_1\circ f_1)_a(x)+D(\theta_2\circ f_2)_a(x)\underset{\theta_1,\theta_2\text{ לינאריים}}{=}\theta_1\circ(Df_1)_a(x)+\theta_2\circ(Df_2)_a(x)=$$

$$=((Df_1)_a(x),0)+(0,(Df_2)_a(x))=((Df_1)_a(x),(Df_2)_a(x))$$

ולהיפך אם - $(Df)_a(x)$ קיים אז $f_1=\pi_1\circ f$ ולכן כלל השרשרת

$(\pi_1$ לינארית$)$: $\qquad (Df_1)_a(x)=\pi_1\circ(Df)_a(x)$

$F=(f_1,f_2): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$

$(Df)_a(x) = ((Df_1)_a(x), (Df_2)_a(x))$ (פירוק הטווח למרכיבים)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

עבור $m=2 \Rightarrow$

ועבור המקרה הכללי: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\begin{array}{r} \text{שורה היא גרדיאנט } \nabla f_1 \to \\ \\ \nabla f_m \to \end{array} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla f_1)(a) \\ \vdots \\ (\nabla f_m)(a) \end{pmatrix}$$

הגדרה: המטריצה
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = Jf_a$$
נקראת מטריצת היעקוביאן של f ב-a.

אם $n=m$ אפשר לחשב את-

היעקוביאן $= |\det(Jf_a)|$

ראינו כי קיום דיפרנציאל $(Df)_a$ גורר קיום הנגזרות החלקיות,

$f: \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}$, $a \in U$.

$$(Df)_a = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

משפט: אם $\underset{\text{תחום}}{f: U} \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ והנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ קיימות ורציפות

בכל נקודה ב-U אזי $(Df)_a$ קיים בכל נקודה $a \in U$. יתר על כן,

הפונקציה $\mathbb{R}^n \to \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}); a \mapsto (Df)_a$ רציפה.

הוכחה: לשם פשטות הסימונים נניח את המקרה $n=2$: $a=(a_1,a_2)$.

$(\Delta f)_a(x) = f(a_1+x_1, a_2+x_2) - f(a_1,a_2) =$

משפט לגראנז'

$= f(a_1+x_1, a_2+x_2) - f(a_1, a_2+x_2) + f(a_1, a_2+x_2) - f(a_1,a_2) =$

קיימים $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$:

$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 x_1, a_2+x_2)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+\theta_2 x_2)x_2 =$

$= (f'_{x_1}(a) + \eta_1(x))x_1 + (f'_{x_2}(a) + \eta_2(x))x_2 = \nabla f(a)\cdot x + \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2$

כאשר $\left[\eta_1(x) = f'_{x_1}(a_1+\theta_1 x_1, a_2+x_2) - f'_{x_1}(a)\right]$, $\lim_{x\to a} \eta_1 x = 0$

כאשר $\eta(x) = (\eta_1(x), \eta_2(x))$: לפי קושי-שוורץ $|\eta\cdot x| \le |\eta|\cdot|x|$

כלומר: $\frac{|\eta\cdot x|}{|x|} = \eta \to 0$:

$(\Delta f)_a(x) = \nabla f(a)\cdot x + o(x) = (Df)_a(x) + o(x)$

$\left(\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right)\right)$

תהי $\mathbb{R}^n \supset \underset{\text{תחום}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$:

(i) הומוגנית $f(tx)=t\cdot f(x)$, t ממשי.

(ii) $f(0)=0$

אז הנגזרת הכיוונית בכיוון x $(|x|=1)$ באפס:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(0+tx)-f(0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(tx)}{t} = f(x)$$

אז נניח בנוסף כי f מקיימת -

(iii) f דיפרנציאבילית באפס אז לכל כיוון x קיים

$(Df)_a(x) =$ הנגזרת הכיוונית בכיוון x $= f(x)$

לכן f - פונקציה לינארית.

דוגמא - $f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}$ $\quad f:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

$f(0)=0$

f רציפה, f הומוגנית, $f(0)=0$.

לכן ל-f יש נגזרת כיוונית לכל כיוון באפס.

פונקציה זו אינה דיפרנציאבילית באפס, כיוון שאינה לינארית.

קיימות נגזרות חלקיות לכל כיוון והפונקציה רציפה, אך אינה דיפרנציאבילית.

(הגרירה ההפוכה תמיד נכונה, כפי שהוכחנו בשיעור שעבר).

דוגמא:

המקרה בו מרחב המקור הוא סכום ישר, (כמו $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ או $X\oplus Y$).

$\underset{\text{מרחבים נורמים}}{U\subset X\oplus Y}$ תחום , $f:U\to \underset{\text{מרחב שלם}}{W}$, $(a,b)\in U$.

$\theta_1: X\to X\oplus Y$ $\quad \theta_2: Y\to X\oplus Y$

$\theta_1(x)=(x,0)$ $\quad \theta_2(y)=(0,y)$

נגדיר - $f_b=f(\cdot,b)$ קובעים את b ומסתכלים על הפונקציה של המשתנה הראשון

$(Df)^1_{(a,b)}(x) := (Df)_{(a,b)}(x,0) = (Df)_{(a,b)}\circ\theta_1(x)$

כלומר, $(Df)^1_{(a,b)}$ הינו הצמצום של $(Df)_{(a,b)}$ אל המרחב $X\times\{0\}\subset X+Y$,

לכל $x\in X$: $(DF)^1_{(a,b)}(x) = (DF_b)_a(x)$

הוכחה:

$$(\Delta F)_{(a,b)} = F(a+x,b+y) - F(a,b)$$

$$(\Delta F)_{(a,b)}\circ\theta_1(x) = F(a+x,b) - F(a,b) = (\Delta F_b)_a(x)$$

$$(\Delta F)_{(a,b)}\circ\theta_1 = \left((DF)_{(a,b)} + \sigma(x,y)\right)\circ\theta_1 = \underbrace{(DF)_{(a,b)}\theta_1}_{T} + \underbrace{\sigma(x,y)\circ\theta_1}_{\sigma(x)}$$

כלומר $T=(DF_b)_a$.

משפט: $U\subset X\times Y$ פתוחה, מרחבים נורמיים, $a,b\in U$,

אם $(DF)_{(a,b)}$ קיים אז קיימות הנגזרות החלקיות – $(DF)^1_{(a,b)}$, $(DF)^2_{(a,b)}$.

ולהיפך – אם אלו קיימות ומתקיים ש- $i=1,2$ $(a,b)\mapsto (DF)^i_{(a,b)} \in Hom(X;W)$ רציפה

אז קיים $(DF)_{(a,b)}$.

ומתקיים $(a,b)\to(DF)_{(a,b)} \in Hom(X\times Y,W)$ רציפה.

הגדרה: תהי $\omega: X\oplus Y\to W$ בי-לינארית, כ- X,Y,W מרחבים נורמיים.

כלומר – $\omega(\cdot,y): X\to W$ לינארית, $\omega(x,\cdot): Y\to W$ לינארית. לכל $x\in X$, $y\in Y$ קבועים.

דוגמא: המכפלה הסקלרית $x\cdot y$ ב- $\mathbb{R}^n$, הינה בילינארית.

$$(\alpha x+\beta x')y = \alpha(x\cdot y)+\beta(x'\cdot y)$$

טענה: ω דיפרנציאבילית וקיים $(D\omega)_{(a,b)}(x,y) = \omega(x,b)+\omega(a,y)$.