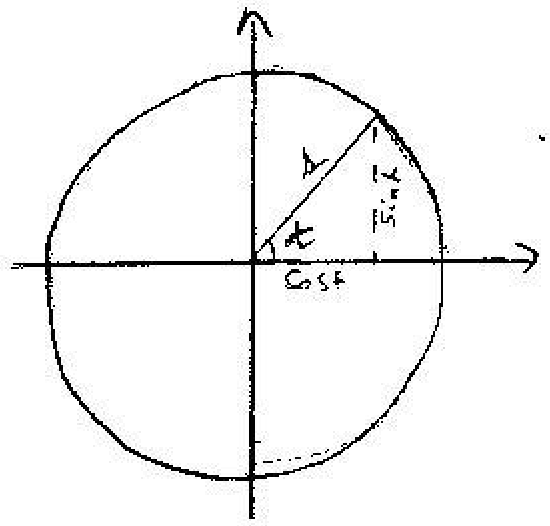
11.11.08

מסילות ב-$\mathbb{R}^n$:

פונקציה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ רציפה תקרא **מסילה**.

דוגמה- $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ $0\le t\le 2\pi$ - סיבוב אחד.



מעגל ברדיוס 1 $\Leftarrow$

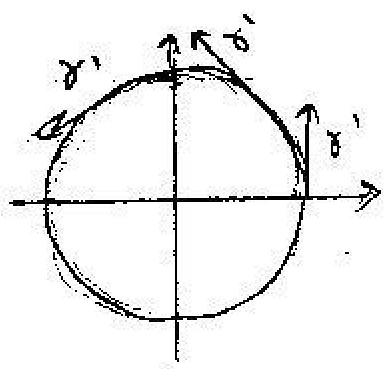
כל מסילה נוכל לרשום - $\gamma(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$

כאשר $x_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

γ גזירה בנקודה $a\le t\le b$ אם כל x_i גזירה בנקודה זו,

ו- $\gamma'(t)=(x_1'(t),x_2'(t),\dots,x_n'(t))$ מתאר כיוון + מהירות התקדמות של המסילה.

$\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ $0\le t\le 2\pi$ $\Leftarrow$ $\gamma'(t)=(-\sin t,\cos t)$



כמו כן $\gamma\perp\gamma'$.

$|\gamma'(t)|$ מודד את גודל ההשתנות

(מהירות של γ).

תרגיל: יהיו γ ו- η שתי מסילות. הוכיחו: $\frac{d}{dt}\langle\gamma(t),\eta(t)\rangle=\langle\gamma(t),\eta'(t)\rangle+\langle\gamma'(t),\eta(t)\rangle$

פתרון: $\frac{d}{dt}\langle\gamma(t),\eta(t)\rangle=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)\eta_i(t)\underset{\text{לינאריות הנגזרת}}{=}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\{\gamma_i(t)\eta_i(t)\}\overset{\text{(=)}}{=}$

$$\underset{\text{כלל המכפלה}}{\overset{\text{(=)}}{=}}\sum_{i=1}^{n}\left(\gamma_i'(t)\eta_i(t)+\eta_i'(t)\gamma_i(t)\right)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i'(t)\eta_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)\eta_i'(t)=\langle\gamma',\eta\rangle+\langle\gamma,\eta'\rangle$$

B

מסקנה: נניח ש-γ מסילה גזירה כך ש- $\gamma\perp\gamma'$, אזי -

$$\frac{d}{dt}|\gamma(t)|^2=\frac{d}{dt}\langle\gamma(t),\gamma(t)\rangle=2\langle\gamma(t),\gamma'(t)\rangle\underset{\text{נתון}}{=}0$$

ולכן - $|\gamma(t)|$ קבוע.

γ מסילה על $\{|x|=a\}$ מסוים.

סיכום: * $|\gamma'(t)|$ קובע את גודל ההשתנות.

* הכיוון של $|\gamma'(t)|$ קובע שינויים בקווי צורה.

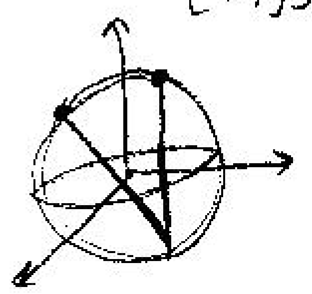
קשירות מסילתית:

קבוצה A היא קשירה מסילתית אם לכל $x,y\in A$ קיימת מסילה $\gamma:[a,b]\to A$ המחברת את x ו-y, כלומר - $\gamma(a)=x$, $\gamma(b)=y$.

דוגמא- $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n \,;\, |x|=1\}$, $n\neq 1$ $\Leftarrow$ ספירה $n-1$ מימדית ($|x|=1$), ולכן לא ניתן לשתוק לה גודל, מספר ורבע במימד אחת n-מ, אוקלידי בדרגת חופש.

$S^0=\{\pm 1\}$, $n=1$

הסבר- יהיו $x,y\in S^{n-1}$ ונגדיר הקו $[x,y]=\{tx+(1-t)y \mid 0\le t\le 1\}$



עובר בתוך הספרה. (x,y נקודות על השפה של הספרה)

אם $0\notin[x,y]$: נגדיר את הקו הזה ונקבל-

$$\gamma(t)=\frac{tx+(2-t)y}{|tx+(2-t)y|}$$

אם אפס היה בקו, היינו נופלים על אי רציפות

כלומר מסילה רציפה ($0\notin[x,y]$) שמקיימת- $\gamma(0)=y$, $\gamma(1)=x$.

$|\gamma(t)|=1$ לכל $0\le t\le 1$ ולכן זאת מסילה בספרה.

אם $0\in[x,y] \Leftrightarrow x=-y$: במקרה זה נקח z : $\begin{cases} z\neq x \\ z\neq y \end{cases}$

אז $\begin{cases} z\neq \pm x \\ z\neq \pm y \end{cases}$ ולכן לפי הנ"ל מסילה-

$\alpha:[0,1]\to S^{n-1}$ מ-x ל-z

$\beta:[0,1]\to S^{n-1}$ מ-z ל-y.

כך ש- $\alpha(0)=x$, $\alpha(1)=z$, $\beta(0)=z$, $\beta(1)=y$.

אז נגדיר- $\gamma:[0,2]\to S^{n-1}$ ע"י

$$\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(t) & 0\le t\le 1\\ \beta(t-1) & 1\le t\le 2\end{cases}$$

γ מסילה בין x ל-y.

משפט ערך הביניים:

אם $f:A\to\mathbb{R}$ (רציפה) רציפה ו-A קשירה מסילתית וקיימות נקודות $x,y\in A$ כך ש- $f(x)>0$, $f(y)<0$ אזי קיימת נקודה $z\in A$ כך ש- $f(z)=0$.

הוכחה: A קשירה מסילתית ולכן נקח מסילה $\gamma:[a,b]\to A$ כך ש- $\gamma(a)=x$, $\gamma(b)=y$ ונגדיר- $\varphi(t)=f(\gamma(t))$.

נשים ♡: φ רציפה כהרכבה של שתי פונקציות רציפות.

$\varphi(a)=f(x)>0$ $\qquad$ $\varphi(b)=f(y)<0$

** נהפוך את זה למשהו מוכר, נעביר את הבעיה מ-n מימדים לחד מימד ע"י מסילה.

ממשפט ערך הביניים ב- $\mathbb{R}$ קיים $a<t_0<b$ כך ש- $\varphi(t_0)=0 = \underset{\in A}{F(\gamma(t_0))}$

אז- $z=\gamma(t_0)$ מקיים $F(z)=0$. ∎

נורמה של אופרטורים (טרנספורמציה לינארית):

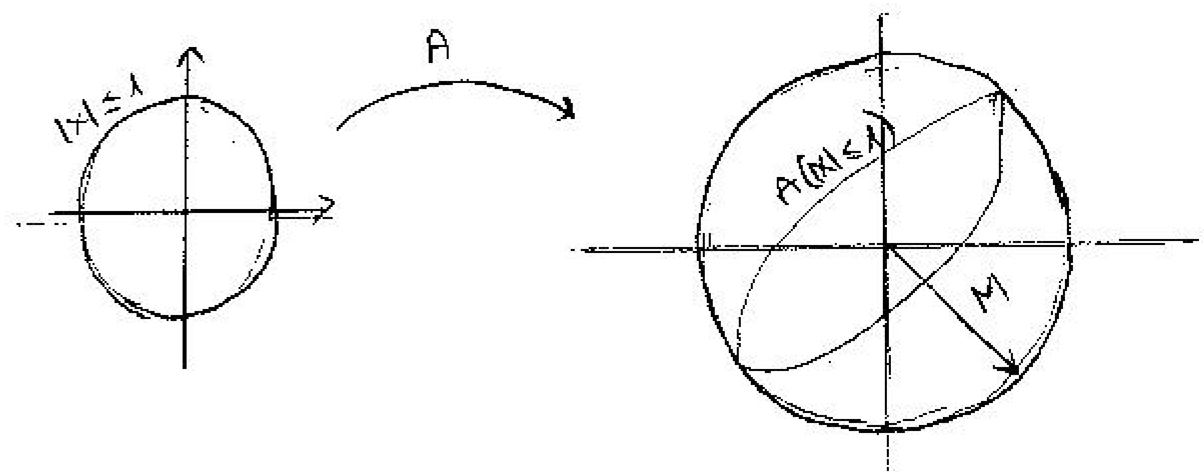
הגדרה 9 בהינתן (תרגיל 1) נורמות כלשהן $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ו- $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ טרנספורמציה לינארית

$$\|A\|_{op} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

מגדיר נורמה על מרחב האופרטורים (מטריצות $m\times n$).

בשיעור ראינו -
$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|$$

מאי שוויון המשולש נקבל חסם עליון של הפונקציה - הנורמה האוקלידית,
כיוון שזוהי קבוצה סגורה - $|x|=1$, נקבל שזוהי קבוצה קומפקטית, ולכן מקבל מקסימום.



מה היא הנורמה?

$M=\|A\|$

$$|Ax| \underset{\substack{\downarrow\\ \text{מתקבלת בגלל מקסימום}}}{=} \|A\| \underset{\substack{\downarrow\\ |x|=1}}{=} \|A\|\cdot|x| \qquad : \quad |x|=1$$

תרגיל: הוכיחו כי לכל $x\in\mathbb{R}^n$: $|Ax| \le \|A\|\cdot|x|$

כמו כן יש נקודה x_0 כך ש- $|Ax_0| = \|A\|$, ולכן לכל חסם אופטימלי.

טענה: $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda}\ ;\ \lambda \text{ ערך עצמי של } A^tA\}$

הוכחה: נזכיר את משפט מאלגברה לינארית-

<u>משפט 1-</u> אם B מטריצה סימטרית (ריבועית) אזי כל הערכים העצמיים הם ממשיים,
וקיים בסיס $\{v_1,\dots,v_n\}$ של וקטורים עצמיים אורתונורמלי.

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad ; \quad \langle v_i,v_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\langle A^tAx,x\rangle = \langle Ax,Ax\rangle = \|Ax\|^2 \ge 0$$

ולכן A^tA מטריצה סימטרית מוגדרת חיובית ולכן מתקיים- $\lambda_n\ge\lambda_{n-1}\ge\dots\ge\lambda_1\ge 0$,

נקח $x;\ |x|=1$, ונראה ש-

$$|Ax|^2 = \langle Ax,Ax\rangle \underset{\substack{\downarrow\\ A^t=A^*}}{=} \langle A^tAx,x\rangle$$

ממשפט הפירוק הספקטרלי יש $0\le\lambda_1\le\dots\le\lambda_n$ ע"ע של A^tA ו- $v_1,\dots,v_n$

בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של λ_i בהתאמה.

מכאן שלכל בסיס קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ כך ש- $\underset{\text{נתון בסיס.}}{x}=\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i$

$$|x|^2=\left<\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i,\sum_{j=1}^n\alpha_jv_j\right>=\sum_{i=1}^n\alpha_i^2\underbrace{\left<v_i,v_i\right>}_{=1}+\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j\underbrace{\left<v_i,v_j\right>}_{=0}=\sum_{i=1}^n\alpha_i^2$$

$$|Ax|^2=\left<A^tA\left(\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i\right),\sum_{j=1}^n\alpha_jv_j\right>=\left<\sum_{i=1}^n\alpha_i\underbrace{A^tAv_i}_{\lambda_iv_i},\sum_{j=1}^n\alpha_jv_j\right>\underset{\text{לינאריות רגיל}}{=}\sum_{i=1}^n\lambda_i\alpha_i^2\le$$

$$\le\max|\lambda_i|\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i^2\right)}_{=|x|^2=1}\le\max|\lambda_i|=\lambda_n$$

אם $x=v_n$ מתקבל -

$$|Av_n|^2=\left<\underbrace{A^tAv_n}_{\lambda_nv_n},v_n\right>=\lambda_n\left<v_n,v_n\right>=\lambda_n$$

לכן $\|A\|^2=\max_{|x|=1}|Ax|^2\le\lambda_n$

וסופית - $\|A\|=\sqrt{\lambda_n}=\max\{\sqrt{\lambda_i}:\lambda_i$ ע"ע של $A^tA\}$

שימוש-בשאלה: $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt3x+y\\2y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt3&1\\0&2\end{pmatrix}}_{A^L}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$A^tA=\begin{pmatrix}3&\sqrt3\\\sqrt3&5\end{pmatrix}$ נמצא ערכים עצמיים:

A^tA כידוע מסדר 2:

$8=tr(A^tA)=\lambda_1+\lambda_2$

$12=|det(A^tA)|=\lambda_1\cdot\lambda_2$

$\Leftarrow$ $\lambda_2=2$, $\lambda_1=6$ $\Leftarrow$ $\|A\|=\sqrt6$.

ניתן להשתמש בזה לפתור קירוב -

מצאנו כבר ראינו $x=0$ שפותר b נקודה ב- $y\in Ball$.

$\|Ay\|\le\alpha\le\sqrt6\|y\|$.

הגדרה B. מרחב מנה: $X/Y=\{[x]; x\in X\}$

$Y\subseteq X$ תת מרחב וקטורי.

$[x]_\sim=\{x+y\ ;y\in Y\}$

$x\sim z$ אם קיים $y\in Y$ כך ש- $x+y=z$.

דיפרנציאביליות:

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית בנקודה $a \in D$ אם קיימת טרנספורמציה לינארית $L_a: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ כך ש-

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ (a+h \in D)}} \frac{|f(a+h) - f(a) - L(h)|}{|h|} = 0 \qquad (i)$$

כלומר אם כך -

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{L(h)}_{\text{קירוב מסדר ראשון}} + o(|h|)$$

לסביבה מאוד קטנה, הקירוב הלינארי הזה יהיה קירוב מאוד טוב לפונקציה.

במקרה זה נסמן - $\alpha_a = D_f(a)$

$$D_f(a)(h) = \lim_{\mathbb{R} \ni t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \qquad (h \in \mathbb{R}^n) \qquad (ii)$$

טענה: (הוכחה בשיעור) אם $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב-a: $F = (F_1, \dots, F_m)$

לכל $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב-a צריך שהנגזרות קיימות: $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ $\quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$

ואז $\quad D_f(a) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

<u>שימושים:</u> להוכחה שלילה / קיום של דיפרנציאביליות.

תרגיל: בדקו האם f המוגדרת ע"י:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

הוכחה: (i) רציפות -

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^3 + 2y^3}{x^2+y^2}\right| \underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\le} \frac{|x|^3 + 2|y|^3}{x^2+y^2} \le \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{2|y|^3}{y^2} = |x| + 2|y| \underset{\text{נורמות ב-}\mathbb{R}^2\text{ שקולות}}{\le} C\|(x,2y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} (0,0)$$

הוכחנו רציפות.

(ii) נחשב נגזרות - $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2$$

מועמד לדיפרנציאל -

$$D_f(0,0) \overset{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = (1,2)$$

(iii) נשאר לבדוק האם -

$$\frac{\left|f(x,y) - f(0,0) - (1,2)\binom{x}{y}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\left|\frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2} - 0 - x - 2y\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

המשך...

$$\frac{\left|\frac{3x^3}{2x^2} - 3x\right|}{\sqrt{2}\,|x|} = \frac{\frac{3}{2}|x|}{\sqrt{2}\,|x|} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \not\longrightarrow 0$$

נקח מסלול $x=y$ ונקבל -

(נימוק לבחירת המסלול הזה כיוון שהשתמשנו ב)

ולכן f לא דיפרנציאבילית.

תרגיל: האם, דיפרנציאבילית?

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\frac{\left|f(x,y) - \overbrace{f(0,0) - (0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}^{=0}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 0}\;\underbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}_{\text{חסום}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$\Leftarrow f$ דיפרנציאבילית.