

אינטגרלים

משפט

מדידת אינטגרלים - סעיף 1. $\mathbb{R}^n$ היא פונקציה $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\mathcal{F}$ סגור תחת איחודים סופיים והוא מכיל את $\emptyset$.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$
 קבוצת החזקה

(1) $\mu(\emptyset) = 0$ (שטח קיים)

(2) $\mu(A) \leq \mu(B)$ אם $A \subset B$ ושניהם ב $\mathcal{F}$.

(3) $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)$ אם $A \cap B = \emptyset$.

כדי למדוד פונקציה - סטיווארט - נדרש $\mu(B_1(0)) = 1$.

אם μ אינטגרל - תחת אינטגרלים של $\mathbb{R}^n$ אז μ נקראת אינטגרל - אחת אינטגרל

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ הינו אינטגרל אם $|x - y| = |x(x) - y(y)|$

G אינטגרל היא הנכנסה של הנכנסה אינטגרל

$T(x) = Tx + a$ $T \in O(n, \mathbb{R})$

$GL(n, \mathbb{R})$

הפונקציה היא $\mu(YA) = \mu(A)$ $\exists A$ של $\mathcal{F}$

$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ $\exists A_n \in \mathcal{F}$ לכל הפעם $\leftarrow$ סטיווארט אינטגרל

משפט בוק-טרכסל (1930)

אם U_1, U_2 הם $\mathbb{R}^n$ (3 $\leq n$) אז יתכן שיהיו קיימים פירוקים

$U_1 = \cup_{i=1}^k A_i$ $U_2 = \cup_{i=1}^k B_i$ A_i, B_i קבוצות זרות

$\varphi: A_i \rightarrow B_i$ φ איזומורפיזם



משקל

אם קיימת מדידת אינטגרלים שבהם האינטגרלים של $\mathbb{R}^n$ (3 $\leq n$) הוואריאנט של הקב' הוואריאנט.

המשפט

גובה $\mathbb{R}^n$ - היא קבוצה מתחברת $I_1 \times \dots \times I_n$ כאשר I_j $j=1, \dots, n$ קטעים סופיים

אם $\mathcal{F}$ הקטעים פתוחים לו תיבה פתוחה (ואכן זו קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^n$).

ואם $\mathcal{F}$ סגורים היא קבוצה סגורה.

קבוצה $E \subset \mathbb{R}^n$ היא קבוצה אפסית $\rightarrow$ Null set) אם לכל $\epsilon > 0$ קיים אפס

בן מניה אפסית של חיבור $\{Q_j\}_{j=1}^\infty$ כך $E \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$ וקיים $\sum_{j=1}^\infty \nu(Q_j) < \epsilon$ כאשר $\nu(Q) = \prod_{j=1}^n |I_j|$

משפט

כל קבוצה E מן מניה ב- $\mathbb{R}^n$ היא בעלת מידה אפס.

(הוכחה: מניח $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ וי, $\epsilon > 0$ נתון, נבחר סביבה Q_j קטנה מספיק

כך ש $\sum_{j=1}^\infty \nu(Q_j) < \epsilon$ ו $\nu(Q_j) \leq \frac{\epsilon}{2^j}$.
 גזע: $\sum_{n=1}^\infty \epsilon_n = \infty \iff \prod_{n=1}^\infty (1 - \epsilon_n) = 0$

הזיהוי נוסף: גוי U קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$ ו $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה C^1 היא

היא $\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ היא בעלת מידה אפס כל עוד $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ היא C^1 ו $n < m$.
Sard משפט

היה $G \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה $C^k(U, \mathbb{R}^m)$ כאשר $k = \max(1, n-m)$ אז קבוצת הערכים הקריטיים של f בעלת מידה אפס.

נקודה x_0 ב- U נקראת קריטית (Critical Point) אם $m > \dim(Df_{x_0})(\mathbb{R}^n)$.

הערך: $\mathbb{R}^m \ni f(x_0)$ נקרא ערך קריטי של f (Critical Value).

הוכחה:

הוכחה: $m > n$ ו $m > \dim(Df_{x_0})(\mathbb{R}^n)$ ולכן גודל המרחב הערכים הקריטיים קטן מ- m .
 נניח $m = n$ (שום דבר כי במקרה זה הערך של f הוא שכינה C^1)

הוכחה:

היה $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ פונקציה C^1 ו $u, v \in A$ כך שהקטע



$$I = \{\lambda u + (1-\lambda)v : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

כל $a \in A$ מקיים:

$$|f(u) - f(v) - Df(a)(u-v)| \leq |u-v| \sup \{|Df_x - Df_a| : x \in I\}$$

הוכחה:

נזכיר שנקבעי $g(x) = f(x) - Df_a(x)$ ו g פונקציה C^1 אפסית בנקודה a

$$(Dg)_x = (Df)_x - (Df)_a$$

$$|g(u) - g(v)| \leq \sup \{|Dg_x| : x \in I\} |u-v|$$

||

(מכיוון C^1 מ- a)

$$|f(u) - Df_a(u) - f(v) + Df_a(v)| \leq |u-v| \sup \{|Df_x - Df_a| : x \in I\} \quad \square$$

(הזיהוי אפסית: המרחב $m=n$ ו $k=1$)

גבי $V \supset A$ קבוצה בקוואר היקטור של f (רובים אחרות) $f(A)$ פתח מזה (אם).

ניתן לבסור את A על ידי אולד בן מניה של תבוס סגורה.

מספיק איכסא אחרות א-הטעם פתח המרה בו A מול פתח $Q \subset U$
 [גבול: איכסא בן מניה של קבוצה אכסא-היני קבוצה אכסא- $f(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(A \cap Q_i)$

יהי S איך המצב של הקוסיה Q . יהי $\epsilon > 0$.

הפסקיה $x \mapsto Df_x$ רציפה ולכן קיים $\delta > 0$ כך שאם $x, y \in Q$: $|x-y| < \delta$ אז
 $|Df_x - Df_y| < \epsilon$. נסמן $M = \max\{|Df_x| : x \in Q\}$ ויהי $\epsilon > 0$.

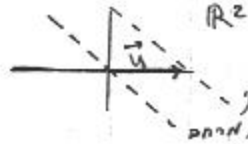
יהי k מקיים $f' < \frac{\sqrt{n} S}{k}$ (ח-ח) הממש-קבוצה).

(ח) $Q \subset \mathbb{R}^n$ קוסיה שלם שאיך מקבול הוא $\frac{S}{k}$.

יהי $a \in Q_j$ קבוצה קוסיה- (Q_j) אחר הקבוצה הקוסיה.

מן ההנחה נובע כי $L \geq f(a) + Df_a(\mathbb{R}^n)$ כואר L אחר-משנה $\mathbb{R}^n$ אכסא-
 $\Rightarrow$ אכסא קבוצה המרה.

מן מרחק אכסא-הוא המרה של מרחק. הווא לא באכסא-מרחק כי אין



בווא-אכסא-לכואכסא:

$V+u$ מרחק אכסא- V מרחק

אחר מישור-מן מרחק אכסא של $\mathbb{R}^n$ מרחק $1-u$

אם $x \in Q_j$ מקיים $|x-a| \leq \sqrt{n} \frac{S}{k} < \delta$

נניח אכסא: $|f(x) - f(a)| \leq |x-a| M \leq \sqrt{n} \frac{S}{k} M$ (*)

$M = \max\{|Df_x| : x \in Q\}$

מרחק: $|f(x) - f(a) - (Df)_a(x-a)| \leq |x-a| \sup\{|(Df)_y - (Df)_a| : y \in I\}$

$I = \{\lambda x + (1-\lambda)a : 0 \leq \lambda \leq 1\}$

אזי $y \in I \Rightarrow |y-a| \leq |x-a| < \delta$ ולכן $|f(y) - f(a)| < \epsilon$

(**) $|f(x) - f(a) - (Df)_a(x-a)| \leq |x-a| \epsilon \leq \epsilon \frac{\sqrt{n} S}{k}$

הקבוצה $f(a) + Df_a(x-a)$ מרחק- L אכסא המרחק של $f(x)$ המרחק האכסא- L

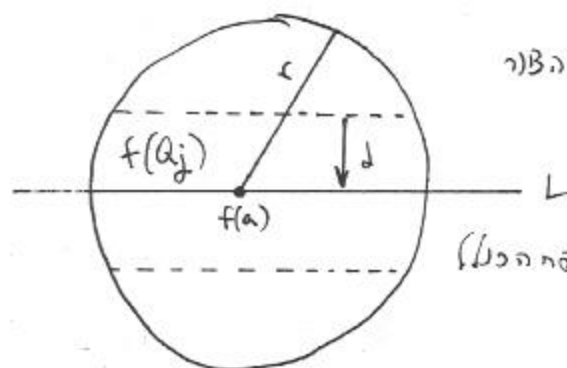
אם $\epsilon \frac{\sqrt{n} S}{k}$

אם $|y-f(a)| \leq \sqrt{n} \frac{S}{k} M$ אז $f(Q_j) \ni y$ (*)

($|y-f(a)| \leq r \Leftrightarrow r = M \frac{\sqrt{n} S}{k}$ נסמן $d = \epsilon \frac{\sqrt{n} S}{k}$)

אם $f(Q_j)$ מרחק אכסא-כואר r אכסא $f(a)$ (*)

. $L \sim d \gg \text{radius } f(Q_j) \Rightarrow \text{approx} \leftarrow (*) \sim$



$$B_j \subset [-d, d] \times [-r, r] \times \dots \times [-r, r]$$

$$2^n d r^{n-1} \quad \text{where } \uparrow \text{ is } s \text{ of } B_j$$

$$\begin{aligned} \text{Volume}(B_j) &= K^n 2^n d r^{n-1} = K^n 2^n \left(\frac{\epsilon \sqrt{n} s}{K} \right) \left(M \frac{\sqrt{n} s}{K} \right)^{n-1} \\ &= \epsilon 2^n (\sqrt{n} s)^n \end{aligned}$$

$$f(Q) \leq \epsilon 2^n (\sqrt{n} s)^n \Leftarrow$$