

1. מרחבי קוץ:

העצרה - מרחב אינרטי X מ $\mathbb{R}$ (או $\mathbb{C}$) יחד עם נורמה $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$
(על קבוצה נקרא מרחב נורמטי).

נורמה מוגדרת מטריקה $d(x, x') = \|x - x'\|$.

אם d היא מטריקה על (X, d) הוא מרחב מטרי שלם (כלומר סגור קלישי).

מובנים אל $(X, \|\cdot\|)$ נקרא מרחב דנק.

בזמנא - $\mathbb{R}^n$ נגזיר נורמה קל $(1 \leq p)$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{נגזיר } p = \infty$$

הוכח דרגת n של נורמה על $\mathbb{R}^n$ (או מרחב וקטורי מ $\mathbb{R}$)

מחייב סופי קדמ, שקילות, משתף מייבנה א - אלה המכונים.

הערה - ניתן להגדיר נורמה קל על מרחבי סגור, סומה.

$$(1 \leq p) \quad \ell_p = \ell_p(\mathbb{N}) = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < \infty\}$$

$$\ell_\infty = \{x : \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$$

מקבל - אלו מרחבי דנק.

בזמנא - $\ell_\infty > \ell_0 = \{x : \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0\}$

דבר אחר - מן המרחב ℓ_∞ הוא אלף הסגור דנק $x_i = 0$ לכל $i \leq \infty$

הוא מרחב, לכן מרחב נורמטי.

לכל $x \in \ell_2$ הסדרה $x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ היא סדרה קלישי (אך אין

זה גורם). אם x יש אינסוף איברים השונים מאפס אזי x אינו בר

מרחב זה (בזמנא מרחב נורמטי לא שלם).

מסקנה - כל מרחב נורמטי מחייב סופי הוא שלם ולכן מרחב דנק.

(מאפשר איזומורפיזם ל- $\mathbb{R}^n$ נורמה האוקלידית).

הערה - יהיו X, Y מרחבי נורמטיים. המרחב $\mathcal{L}(X, Y)$ המרחב של פונקציות:

(1) T רצף דאפס.

(2) T חסומה.

(3) T מקיימת תנאי איבלין (ועד רציפה דמיונית)

(4) T רציפה.

הוכחה - (1) ← (2) הוכחתי דילמה שלמה

$$|T_x - T_y| = |T(x-y)| \leq |T| |x-y| \quad (2) \leftarrow (1)$$

קיום משה

נסמן $f \in \text{Hom}(X, Y)$ כל אלו ההערכות הניגזות (החסומות)

הערה - $T \in \text{Hom}(X, Y)$ נקרא איזומורפיזם אם הוא חתף וזו

$T^{-1} \in \text{Hom}(Y, X)$

מרחבים נורמיים X ו- Y הן איזומורפיזם אם יש $T \in \text{Hom}(X, Y)$ שהיא איזומורפיזם.

הערה - כל שני מרחבים נורמיים מחוברים סופי הם איזומורפיזם.

הוכחה - כל שני כאלה שקולים, באופן - $C \|x\| \leq |x| \leq C \|x\|$

(לפי הגדרת הנורמה נגד זהות כי שני הנורמות מוגדרות על אותו מרחב)

כאשר $| \cdot |$ ו- $\| \cdot \|$ מסתנים את שני הנורמות,

כאשר ההערכה - $\text{id}: (x, | \cdot |) \rightarrow (x, \| \cdot \|)$

הוכחה - $\text{id}: (x, \| \cdot \|) \rightarrow (x, | \cdot |)$

הערה - הנורמה רציפה, כלומר - אם $x_n \rightarrow x$ אז $|x_n| \rightarrow |x|$.

הוכחה - אי שוויון המשולש $|x| \leq |x_n - x| + |x_n| \Rightarrow$

$$|x| - |x_n| \leq |x_n - x| \rightarrow 0$$

$$|x_n| - |x| \leq |x_n - x| \rightarrow 0 \quad \text{מסימטריות}$$

$$| |x_n| - |x| | \rightarrow 0$$

אם X, Y מרחבים נורמיים נצבי $X \oplus Y$ נכונה על:

$$|(x, y)| = |x| + |y| \quad (\text{סכום ישר - חיבור כל צדד הקואורדינטות})$$

אם X, Y מרחבי דנק אז גם $(X \oplus Y, | \cdot |)$ מרחב דנק,

$$(x, y) \leftarrow (x_n, y_n) \iff x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$$

$$|(x, y)| = |x| + |y| \quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

ההערכות ההפסק - $\pi_1(x, y) = x, \pi_2(x, y) = y$ הן זיגזגיות

$$|\pi_1| = |\pi_2| = 1 \quad \text{חסומות}$$

הערה - כל נורמה $X \oplus Y$ המקיימת שיתום אלוהי הוקלטה הן

רציפה שקולה ונורמה l_1

$$X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z \quad \text{אם } T \circ S = 0$$

$$|T \circ S| \leq |T| |S| \quad - \text{אם}$$

$$|T(Sx)| = |T(Sx)| \leq |T| |Sx| \leq |T| |S| |x| \quad - \text{הכלמה}$$

Riesz - כבוד היחידה דמיון דמיון קומפקטי אחרים הומיומורפי.

הכלמה - כיוון אחר יצא דמיון זה תלוי מה האופרציה (ℓ_2^n) קל

הינה קומפקטי אחרים היא סגורה לסוגיה אף כן כבוד היחידה, אלא דבר

מחזיק דמיון קצוץ סגורה לסוגיה, הוא קומפקטי. כיוון של מרחבי דמיון

מחזיק סופי ה איזומורפיזם ℓ_2^n כלל כיוון אחר של המלפס. למה להיות כיוון של:

למה: אם x מרחב דמיון $Y \not\subset X$ גר מרחב סגור אלא סגור

אם קיים וקטור $x \in X$, $|x|=1$ כן $\inf \{d(x,y) : y \in Y\} = \text{dist}(x,Y) > 1-\epsilon-\epsilon$

(הצגה) - אם $\text{dist}(x,y)=0$ אף $x \in Y$, של קיים סגור $y \in Y$:

$|x - x_n| \rightarrow 0$ כלומר $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, אך x סגור של $x \in Y$. מרחב סגור.

מרחב סגור של $x \in Y$ הוא $X/Y = \{x+Y : x \in X\}$ הסגוריה -

$|\hat{x}| = \text{dist}(x,Y)$, כאשר x נציג כלשהו, הוא כלשהו (דמיון אף x דמיון).

כל סמן המרחב של x - ההכלמה דאוסן הכלל:

נציג דאונצוקציה סגור וקטורים $x_n \in X$ כן $|x_n|=1$ שיהיה וול x אף

$Y_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ - מרחב מחזיק סופי (כל) וול גר מרחב סגור.

אם $Y_n \neq X$ (מרחב סגור סופי) נבחר זכר המרחב Y_{n+1} כן $|x_{n+1}|=1$ -

$\text{dist}(x_{n+1}, Y_n) < 1-\epsilon$, לסגור $\{x_n\}$ אין גר סגור מוגבל.

נבחר לסגוריה הינה מוגבל אף היינו ציינו למצוא של x' קטורים, אך -

כל $n \neq m$ $d(x_n, x_m) > 1-\epsilon$ זכר דמיון (הקטורים).

צגמא - $Y = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ סגור.

$(x,y) + Y = \{(x,z) : z \in \mathbb{R}\}$

יהיו X, Y מרחבי דנק (מרחבים נורמטיים).

יהי f אפס הומוקציה f המוגדרת על סביבה U סביבה $x \in X$ ל Y .

דמיון מרחב X , $x \in X$ סביבה היא קבוצה A כך שיהיה

$$0 < R : B_R(x) \subset A$$



$f \in \mathcal{C}$ $\mathcal{C}$ הומוקציה f כך $f(x) = 0$ f^{-1} נכונה דאנס.

$\theta \in \mathcal{C}$ θ הומוקציה f כך $f(x) = 0$ f^{-1} מקיימת גבול זיכר דאנס,

כלומר קיים C כך $|f(x)| \leq C|x|$ עבור x קטנים מספיק אפס.

גבול זיכר - $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, כלומר הומוקציה חסומה $\Leftarrow$

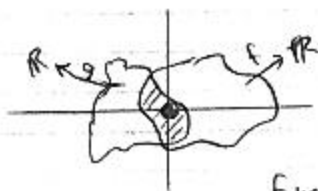
נכונה ונכונה דמיון, $f \in \mathcal{C}$ (x, y) .

$$\lim_{|x| \rightarrow 0, |x| \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = 0 \quad \text{כך } f \in \theta$$

הערה - כל אחד מן המרחקים $\sigma, \theta, \mathcal{C}$ היום "נמצא" אף דמיון.

(מרחק וקטורי יש לו מבטא), הערה היא דמיון הומוקציה.

כשנבדקים את הומוקציה ונראה אז מה הסכום שלהם דנקיה מסתירה לא



יהיה שיהיה מוגדרת דנקיה.

$$f, g \in \mathcal{C}$$

$$f+g: U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{"f+g" מוגדרת } f, g$$

כאשר U_i הן הסביבה $(i=1, 2)$ של אפס דנק f, g מוגדרות.

מגדירים יהיה שקול $f+g$ אז דמיון של אפס U כך U -

$$f|_U = g|_U \quad \text{מחלקת השקולות מהווה אוסף דנק (germ)}$$

אם $f \in \mathcal{C}$, נגד $f(x) = 0(x)$, וכו'.

ערה - אם f או g ד- θ והשניה θ אז $g \circ f$ ד- θ ,

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad \text{כאשר}$$