.12.2008
תרגול מס' :

יואל חזנוב
ימי קזולוב

<u>שאלה משוב.</u>

יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי $f: U \to \mathbb{R}$ $C^1(U)$ $K \subseteq U$ קומפקטי

צ.ל. f ליפשיץ על K כלומר קיים M כך שלכל $x,y \in K$ $|f(x)-f(y)| < M|x-y|$

<u>פתרון</u>

רמז להוכיח קודם עבור K כדור סגור

קבוצה קומפקטית ⇐ משפט לגרנז' + $a \longleftrightarrow Da$ רציפה ולכן חסומה

נניח בשלילה ש f לא ליפשיץ ב K ⇐ $\exists \{x_j\}, \{y_j\}$ כך ש

$$\frac{f(x_j)-f(y_j)}{x_j-y_j} \to \infty$$

f רציפה על K ולכן קיים $C>0$ כך ש $|f(x_j)-f(y_j)| < 2C$ ולכן ... $|x_j-y_j| \to 0$

K קומפקטי ולכן יש לנו תת סדרה $x_{n_k} \to x \in K$ ניקח ממנה תת סדרה $y_{n_{k_l}} \to y \in K$

כיוון ש $|x_j-y_j| \to 0$ $y=x$.

בשביל הנוחיות נסמן $y_{n_{k_l}} = y_l$ $x_{n_{k_l}} = x_l$

$$\lim x_l = \lim y_l = x \in K \subseteq U$$

ולכן החל ממקום מסוים $x_l, y_l \in \underset{\text{כדור סגור}}{B} \subseteq U$

⇐ משלב א' קיים $M>0$

שעבור $\frac{f(x_l)-f(y_l)}{x_l-y_l} < M$

<u>משפט הפונקציה הסתומה</u>

נתונה מערכת משוואות

$$(*) \begin{cases} f_1(\vec{x},\vec{y}) = f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(\vec{x},\vec{y}) = f_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = 0 \end{cases}$$

צורה שקולה $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$$F(x,y) = 0$$

<u>במשפט:</u>

אם $(\vec{a},\vec{b})$ פתרון של מערכת משוואות $(*)$ ובנוסף $\det\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\right)_{m\times m}(a,b) \neq 0$

אז קיימות סביבות $\begin{cases} U = U(a) \subseteq \mathbb{R}^n \\ V = V(b) \subseteq \mathbb{R}^m \end{cases}$ ופונקציה C^1 $y(x): U \to V$

כך שלכל $(x,y) \in U \times V$ $y = y(x) \Leftrightarrow f_i(x,y) = 0$ לכל $1 \le i \le n$

יש לנו יח' התאמה בין ה x-ים ב U לבין ה y-ים שפותרים יחד עם x את המשוואה

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{m\times n}(x,y(x)) = -\left(\frac{\partial(f_1,\dots f_m)}{\partial(y_1,\dots y_m)}\right)^{-1}_{m\times m}(x,y(x))\left(\frac{\partial f\dots}{\partial x}\right)_{m\times n}$$

<u>דוגמא</u>

נתונה מערכת משוואות

$$f_1(x,y,z) = x+y+z-1=0$$
$$f_2(x,y,z) = x^3-y^3+z^2-1=0$$

נשים לב ש $(1,1,-1)$ פתרון

נבדוק האם y, z מוגדרים בצורה סתומה (כפונקציה של x) סביב הנקודה הנ"ל.

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}(1,1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1,-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3y^2 & 2z \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1,-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

לכן זאת מטריצה הפיכה.

ממשפט הפונקציה הסתומה קיימת סביבה של $x=1$ ופונקציות (y,z) עבור

$. y(x), z(x)$

קיימת סביבה של $x=1$:

$$\begin{cases} f_1(x,y(x),z(x))=0 \\ f_2(x,y(x),z(x))=0 \end{cases}$$

נגזור לפי x: לפי כלל השרשרת

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

נעביר את $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ לאגף הימני ונקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix}$$

נכפיל ב A^{-1}:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} = -A^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix}$$

איך נמצא הנגזרת => מתוך כלל השרשרת)

נחשב $y'(1)$ $z'(1)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,-1) = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1,-1) = 3$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x}(1) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{\partial y}{\partial x}(1) \qquad b = \frac{\partial z}{\partial x}(1)$$

דוגמא נוספת

חשבו את $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ של $y(x)$ שמוגדר בצורה סתומה בסביבת $(0,1)$ ע"י

$$x^3+y^2-xy=1$$

פתרון:

$(0,1)$ פתרון $1 = 0+1-0$ – בדיקה ראשונית ✓

$$f_1(x,y) = x^3+y^2-xy-1=0$$

כעת נבדוק: $\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,1)=2y-x\Big|_{(0,1)} = 2 \neq 0$ $\Leftarrow$ y מוגדר בצורה סתומה ע"י x בסב' $(0,1)$.

$$x^3+y(x)^2-xy(x)-1=0$$

נגזור לפי x: $3x^2+2y\cdot y'-y'x-y=0$

$$y' = -\frac{3x^2-y}{2y-x}$$

$$y'(0) = -\frac{3\cdot 0-y(0)}{2y(0)-0} = -\frac{1}{2}y(0) = -\frac{1}{2}$$

$y(0)=1$

נגזור את y' לפי x: $y'' = \frac{(6x-y')(2y-x)-(2y'-1)(3x^2-y)}{(2y-x)^2}$

$\Rightarrow \quad y''(0) = \frac{1}{4}$

$y'(0)=\frac{1}{2}$

$y(0)=1$

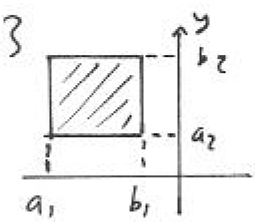
$x(0)=0$

קבוצות עם מידה אפס

הגדרות:

תיבה סגורה ב $\mathbb{R}^n$: $Q=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]=$

$$=\mathop{\times}_{i=1}^{n}[a_i,b_i]=\{x\in\mathbb{R}^n : a_i\le x_i\le b_i\}$$



תיבה פתוחה: $Q=\mathop{\times}_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$

נפח אפס: $A\subseteq\mathbb{R}^n$ בעלת נפח אפס אם לכל $\varepsilon>0$, קיימות תיבות סגורות (A,ε) $\{Q_i\}_{i=1}^m$ מספר סופי כך ש $A\subseteq\bigcup_{i=1}^m Q_i$! $\sum_{i=1}^m Vol(Q_i)<\varepsilon$

למשל: $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ לא מנפח אפס. כי בכל כיסוי סופי של קוביות ונניח לקח גם את כל המספרים האי רציונליים ב- $[0,1]$ ולכן $\sum_{i=1}^{n} Vol(Q_i) \geq 1$

<u>מידה אפס</u>: $A\subseteq\mathbb{R}^n$ בעלת מידה אפס אם לכל ε קיים כיסוי בן מניה של תיבות פתוחות $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ כך ש $A\subset\bigcup_i Q_i$ $\sum_i Vol(Q_i)<\varepsilon$

<u>דוגמאות:</u>

א. $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ (כל קבוצה בת מניה)

$\mathbb{Q}=\{q_j\}_{j=1}^{\infty}$ נסדר את $\mathbb{Q}$ בתור סדרה

יהי $0<\varepsilon$ נגדיר $I_j=\left(q_j-\frac{\varepsilon}{2^{j+1}},\, q_j+\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right) \Leftarrow Vol(I_j)=\frac{\varepsilon}{2^j}$

$$q_j\in I_j$$

$$\mathbb{Q}\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} I_j$$

$$\sum^{\infty} Vol(I_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^j}=\varepsilon$$

ב. נפח אפס $\rightarrow$ מידה אפס.

$\Downarrow$ $\not\leftarrow$ (כלומר $\mathbb{Q}$ ממידה אפס אך לא מנפח אפס)

יהי לנו קבוצה סופית $A\subseteq\bigcup_{j=1}^{m} Q_j$ $\{Q_j\}_{j=1}^{m}$ - תיבות סגורות

$$\sum Vol(Q_j)<\varepsilon$$

∂Q_j מנוונת בממד אחד. ולכן ממידה אפס.

$$\tilde{Q}_j=Int(Q_j)$$

$$A\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}\tilde{Q}_j\cup\underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^{m}\partial Q_j\right)}_{\text{מספר סופי של קבוצות ממידה אפס}}$$

$\Downarrow$

ממידה אפס

$\bigcup\partial Q_j$ ממידה אפס ולכן קיימות $\tilde{Q}_k$ $k=m+1,\dots,\infty$

כך ש $\bigcup\partial Q_j\subseteq\bigcup\tilde{Q}_k$

$$\sum Vol\,\tilde{Q}_k<\varepsilon$$

$$A\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}\tilde{Q}_j$$

$$\sum Vol\,\tilde{Q}_j<2\varepsilon$$

ג. איחוד בן מניה של קבוצות ממידה אפס הוא ממידה אפס (בשיעור)

$\Leftarrow$ (איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה).

A_i ממידה אפס $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ יהי $\varepsilon>0$ $A_i\subseteq\bigcup Q_j^{(i)}$, $\sum Vol\, Q_j^{(i)}<\frac{\varepsilon}{2^i}$

$$A \subseteq \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^{(i)}}_{\text{בן מניה}} \overset{\text{אחרי שינוי אינדקס}}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{Q}_j$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} Vol(\tilde{Q}_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} Vol\, Q_j^{(i)}}_{<\frac{\varepsilon}{2^i}} < \varepsilon$$

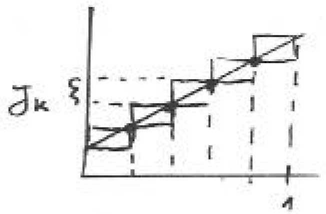
בהזדמנות: $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$

3. קו ישר $l \subseteq \mathbb{R}^2$ נגדיר l $\quad l[0,1] = l|_{0\le x\le 1}$

הוא ממידה אפס. בהוכחה נראה שלכל $n\in\mathbb{Z}$ אז

$l[n,n+1]$ ממידה אפס

$l=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} l[n,n+1]$ ממידה אפס (כאיחוד בן מניה של קבוצות ממידה אפס)



$$l[0,1] = \{(x,y) : 0\le x\le 1 \quad y=ax+b\}$$

נחלק את $[0,1]$ ל-N קטעים באורך שווה

$$I_1=[0,\tfrac{1}{N}] \quad I_2=[\tfrac{1}{N},\tfrac{2}{N}] \quad \dots \quad I_N=[\tfrac{N-1}{N},1]$$

נגדיר $\quad k=1\dots N \quad J_k=[a\frac{k-1}{N}+b,\ a\frac{k}{N}+b]$

$$Q_k = I_k \times J_k$$

$$Vol(Q_k) = \underset{\frac{1}{N}}{\underset{\parallel}{length(I_k)}} \times \underset{\frac{|a|}{N}}{\underset{\parallel}{length(J_k)}} = \frac{|a|}{N^2}$$

נשים לב $\quad l[0,1] \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} Q_k$

$$\sum_{k=1}^{N} Vol(Q_k) = \sum_{k=1}^{N}\frac{|a|}{N^2} = \frac{|a|}{N} < \epsilon$$

נבחר N מספיק גדול

$\Rightarrow$ $l[0,1]$ מכסה אפס $\Rightarrow$ ממידה אפס.

*** דרך אחרת:
למי שרוצה יותר תיבות פתוחות

$$\tilde{Q}_k = \left(\frac{k-1}{N},\frac{k}{N}\right)\times\left(a\frac{k-1}{N}+b,\ a\frac{k}{N}+b\right)$$

$$I \subseteq \bigcup \tilde{Q}_k \cup \underbrace{\left\{\frac{k}{N}\right\}_{k=0}^{N}}_{\text{נכסה ע"י תיבות פתוחות קטנות כרצוננו}}$$

4. $f: Q \to \mathbb{R}$ רציפה. $Q \subset \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. $G_f=\{(x,f(x)) : x\in Q\}$ ממידה אפס

__הוכחה:__ f רציפה על Q, Q תיבה סגורה $\Rightarrow$ קומפקטית ולכן f רציפה

במידה שווה $\quad x,y\in\tilde{Q}_j \Rightarrow |x-y| \le \underset{\text{קוטר}}{\underset{\downarrow}{diam(Q_j)}}$

יהי $\varepsilon>0$ ונחפש כיסוי $\varepsilon>$ הסכום נפחיו

קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x-y|<\delta$ $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ רציפות במידה שווה.

נחלק את Q לתיבות סגורות $\{\tilde{Q}_j\}_{j=1}^{m}$ כך שלכל $x,y\in\tilde{Q}_j$ $|x-y|<\delta$

חלוקה $Q=\bigcup_{j=1}^{m}\tilde{Q}_j$

נגדיר $Q_j=\tilde{Q}_j\times\underbrace{[\min_{\tilde{Q}_j} f(x),\max_{\tilde{Q}_j} f(x)]}$

$\tilde{I}_j$ תופס את כל $f(x)$ ב- $\tilde{Q}_j$

$\text{length}(\tilde{I}_j)<\varepsilon$

$$G_f\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}Q_j$$

$$\sum_{j=1}^{m}Vol(Q_j)=\sum_{j=1}^{m}Vol(\tilde{Q}_j)\cdot\varepsilon=$$

$$=\varepsilon\sum_{j=1}^{m}Vol(\tilde{Q}_j)=\varepsilon\underbrace{Vol\,Q}_{\text{מס' קבוע}}$$

$\Leftarrow$ G_f מנפח אפס $\Leftarrow$ G_f ממידה אפס.

<u>תרגיל</u> - הופיע הרבה במבחנים !

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה C^1 ונגדיר $E=\{x:f(x)=0\}$

<u>טענה:</u> אם $\nabla f(x)\neq0$ $\forall x\in E$ $\Leftarrow$ E ממידה אפס

מבוא 3 אלמנטים: א. $\nabla f(x)\neq0$ $\Leftarrow$ פונקציה סתומה.

ב. $Q\subseteq P(\mathbb{R}^n)$ - קבוצת הקבוצות $\{\times_{i=1}^{n}[a_i,b_i]\ ;\ a_i,b_i\in\mathbb{Q}\}$ בת מניה.

ניתנת לשיכון (פונקציה חח"ע) ב- $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})^n$ בת מניה.

$\underbrace{\times[a_i,b_i]}_{\text{תיבה}}\to\times(a_i,b_i)$ קואורדינטות

ג. פונקציה $f:Q\to\mathbb{R}$ רציפה $\Leftarrow$ G_f ממידה אפס.

<u>הוכחה רשמית:</u>

<u>שלב א':</u> נשתמש במשפט הפונקציה הסתומה כדי לרדת ממד יהי $a\in E$

$\nabla f(a)\neq0$ ולכן קיים i כך ש- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\neq0$

לפי משפט הפונקציה הסתומה קיימות $U=U(a_1,\dots,a_{i-1},\hat{a}_i,a_{i+1},\dots,a_n)$

$V=V(a_i)$ ($\hat{a}_i$ משמעותו - לא כולל a_i)

כך ש $x_i : U \to V$ פונקציה שמגדירה את כל הפתרונות

$(x_1 \ldots \hat{x}_i \ldots x_n) \in U \Rightarrow$ $(x_1, \ldots x_n)$ של $f(x)=0$

$x_i \in V$

בשביל הפישוט נאמר קיימת $W_a = (U \times V)$ סביבה $W_a \cap E$

במקום הנכון

הוא גרף של פונקציה C^1, בפרט רציפה.

ניקח $a \in Q_a \subseteq W_a$ קוביה סגורה עם קואורדינטות רציונליות

$$E \subseteq \bigcup_{a\in E} \underbrace{(Q_a \cap E)}$$

גרף של פונקציה רציפה מקוביה ולכן ממידה אפס.

E מוכלת באיחוד בן מניה (קוביות עם קצוות רציונליים) של ממידה אפס

<u>קבוצת קנטור</u> $\frac{1}{3}$

בניה אינדוקטיבית:

$$C_0 = [0,1]$$

$$C_1 = [0,\tfrac{1}{3}] \quad [\tfrac{2}{3},1]$$

$$[0,\tfrac{1}{9}] \quad [\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{3}] \quad [\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{9}] \quad [\tfrac{8}{9},1]$$

הורדנו שליש אמצעי בכל שלב.

בשלב ה-n יש לנו 2^n קטעים באורך $(\frac{1}{3})^n$ ולכל אחד כזה באמצע

$n+1$ נוריד את השליש האמצעי שלו.

$$I_j = \left[\frac{l}{3^j}, \frac{l+1}{3^j}\right] \qquad l = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\beta_k}{3^k} \qquad \beta_k \in \{0,2\}$$

$$C_j = \bigcup_j I_j$$

$$e = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$$

נשים לב:

א. קבוצה סגורה - חיתוך בן מניה של קטעים סגורים

ב. כיסוי סופי ע"י קטעים $e \subseteq C_j$

$$\sum_{I \in C_j} \underset{(\frac{1}{3})^j}{\underset{\parallel}{\mathrm{Vol}\, I}} = \sum_{k=1}^{2^j} \frac{1}{3^j} = \frac{2^j}{3^j} \to 0$$

$\Leftarrow$ e מידה אפס

ג. $e = \sum \frac{\beta_j}{3^j} \simeq 2^{\mathbb{N}}$ מכפילים עוצמה

$\beta_j = \{0,1\}$

כי לכל איבר ב-C מתאימה ספרה בינארית ולהפך $|e| = \aleph$