יט. משפט נקודת השבת, הוכחה טופולוגית למשפט הפונקציות הסתומות

משפט

יהי (X,d) מרחב מטרי שלם לא ריק.

1. תהי $\varphi: X \to X$ העתקה כיווץ עם קבוע כיווץ $0<c<1$
(כלומר $d(\varphi(x),\varphi(x')) \le c\, d(x,x')$ לכל $x,x' \in X$).
אזי ל-φ יש נקודת שבת יחידה $p \in X$ כלומר $\varphi(p)=p$ ואם גם $\varphi(q)=q$ אז $p=q$.

2. יהי $\overline{B_r(x_0)} \supset D$ $(0<r)$ ותהי $\varphi: D \to X$ העתקה כיווץ עם קבוע כיווץ $0<c<1$ אם $d(x_0,\varphi(x_0)) \le (1-c)r$ אז $\varphi(D) \subset D$ ויש לה נקודת שבת יחידה p ב-D.

3. עבור $B=B_r(x_0)$ $(0<r)$; $\varphi: B \to X$ העתקה כיווץ עם קבוע $0<c<1$ אם $d(x_0,\varphi(x_0)) < (1-c)r$ אז $\varphi(B) \subset B$ ויש נקודת שבת יחידה ב-B.

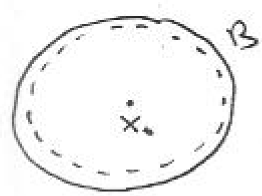
4. אם $\varphi: X \to X$ כיווץ עם קבוע $0<c<1$; $d(x,\varphi(x))=\delta$ עבור x מסוים ב-X אז $d(x,p) < \frac{\delta}{1-c}$ כאשר p נקודת השבת היחידה ב-X.

הוכחה:

1. הוכח בשיעור שעבר

2. תהי $x \in D$:
$$d(\varphi(x),x_0) = d(\varphi(x),\varphi(x_0)) + d(\varphi(x_0),x_0) \le$$
$$\le c\,d(x,x_0) + (1-c)r \le cr + (1-c)r = r$$
כלומר $\varphi(x) \in D$ כלומר $\varphi(D) \subset D$ וניתן להפעיל את 1 על המרחב המטרי השלם D.

3. $\varphi(B) \subset B$



4. נגדיר $r = \frac{\delta}{1-c}$ ויהי $D = \overline{B_r(x)}$
$$d(x,\varphi(x)) = \delta = (1-c)r$$
ולפי 2 יש נקודת שבת $p \in D$ כלומר $d(x,p) \le \frac{\delta}{1-c} = r$

$\boxtimes$

משפט

יהי (X,d) מרחב מטרי שלם ותהי $\varphi_s : X \to X$ העתקת כיווץ לכל $s \in S$

כאשר (S,ρ) מרחב מטרי לכל ההעתקות φ_s אותו גורם כיווץ $0<c<1$

כמו כן נניח כי לכל $x \in X$ ההעתקה $\underset{\varphi(s,x)}{\varphi_s(x)} \longleftarrow\!\!\!| \, s$ רציפה.

אז ההעתקה $s \longmapsto P_s$ כאשר P_s נקודת השבת היחידה של φ_s ב X היא רציפה.

הוכחה:

נקבע $t \in S$ ויהי $\varepsilon > 0$.

מרציפות הפונקציה: $s \longmapsto \varphi_s(P_t)$ קיים $\delta > 0$ כך ש $\rho(t,s) < \delta \Rightarrow$
$d(\varphi_s(P_t), \varphi_t(P_t)) = d(\varphi_s(P_t), P_t) < \varepsilon$.

לפי המשפט הקודם סעיף ④ (עבור $\varphi = \varphi_s$ ו $x = P_t$), $d(P_t, P_s) < \frac{\varepsilon}{1-c}$. ☒

מסקנה (מן הטענות של המשפט 1-3 והמשפט השני)

יהי $B = B_r(x_0)$ $r > 0$ כדור במרחב מטרי שלם (X,d) ויהי (S,ρ)

מרחב מטרי. תהי $\varphi : S \times B \to X$ משפחה $\varphi = \varphi_r = \varphi(s,\cdot)$ של כיווצים

אוניפורמים (כלומר אותו קבוע כיווץ $0<c<1$ לכולן) רציפה במשתנה s לכל x

קבוע.

כמו כן נניח כי $d(\varphi_s(x_0), x_0) < (1-c)r$ לכל $s \in S$.

אז לכל $s \in S$ יש נקודת שבת $P_s \in B$ וההעתקה $s \mapsto P_s$ רציפה.

משפט הפונקציה הסתומה

יהיו V,W,Z מרחבי בנך $A \times B \subset V \times W$ כאשר A ו B תחומים ב V ו W

בהתאמה. $f : A \times B \to Z$ רציפה ובעלת דיפרנציאלים חלקיים $(Df)^1$ $(Df)^2$

רציפים ב $A \times B$. תהי $(a,b) \in A \times B$ כך ש:

1. $f(a,b) = 0$ 2. $(Df)^1_{(a,b)} : V \to Z$ הפיך.

אז קיימים כדורים M סביב a ו N סביב b כך שלכל $y \in N$ קיים

$x \in M$ יחיד עבורו $f(x,y) = 0$ וההעתקה $y \longmapsto x = g(y)$ רציפה.

תרגיל: השלימו את ההוכחה והראו כי g דיפרנציאבילית וכי ההעתקה $y \longmapsto (Dg)_y$

רציפה על N ואז חקרו נוסחה עבור $(Dg)_y$. - הוכחה דומה למשפט

הפונקציה ההפוכה

הוכחה:

נסמן $Hom(V,Z) \ni T = (D_f)^1_{(a,b)}$

נגדיר $\varphi(x,y) = x - T^{-1}\circ f(x,y)$

$$\varphi : A\times B \to V$$

ברור כי φ רציפה ומתקיים השוויון $\varphi(a,b) = a - T^{-1}f(a,b) = a$

כמו כן ל-φ יש דיפרנציאל חלקי לפי המשתנה ב-V רציף

$(x,y)\in A\times B$ $\quad (D\varphi)^1_{(x,y)}(z) = \left(Id_V - T^{-1}\circ(Df)^1_{(x,y)}\right)(z) = z - T^{-1}(Df)^1_{(x,y)}(z)$

ובפרט $(D\varphi)^1_{(a,b)}(z) = z - T^{-1}(Df)^1_{(a,b)}z = z - z = 0$.

מרציפות נובע קיום כדורים $M\subset A\subset V$ $N\subset B\subset W$ סביב a ו-b בהתאמה כך ש: $\left\|(D\varphi)^1_{(x,y)}\right\| \le \frac{1}{2}$ לכל $(x,y)\in M\times N$.

אם הרדיוס של N הוא $r>0$ נוכל להניח בנוסף כי הרדיוס של M הוא מספיק קטן כדי להבטיח כי $|\varphi(x,y)-x| < \frac{r}{2}$ (שכן $\varphi(a,b)-a=0$) לכל $M\times N\ni(x,y)$.

לפי משפט ערך הביניים נקבל $\varphi(x,y)-\varphi(x',y) \le \frac{1}{2}|x-x'|$ לכל $y\in N$ ולכל $x,x'\in M$

לפי המסקנה (למשפט נקודת השבת) נקבל כי לכל $y\in N$ יש נקודת שבת יחידה לפונקציה $x\mapsto\varphi(x,y)$ $g(y)\in M$ כלומר $\varphi(g(y),y) = g(y)$

והפונקציה $y\mapsto g(y)$ רציפה. $\qquad \varphi(g(y),y) = g(y) - T^{-1}f(g(y),y)$

לכן $0 = T^{-1}f(g(y),y)$ ולכן $f(g(y),y) = 0$

נניח הוכחנו את הגזירות (ניתן כתרגיל מקדם) של g.

לסיום נחשב את $(Dg)_y$ בהנחה ש-g דיפרנציאבילי.

נגדיר: $0 \equiv \psi(y) = f(g(y),y)$

$$\psi: \mathbb{R}^m \xrightarrow{(g,id)} \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$$
$$W \longrightarrow V\times W \longrightarrow Z$$

$$0 = (D\psi)_y(\eta) = (Df)_{(g(y),y)}\circ\left((Dg)_y \otimes I\right)(\eta) = \left((Df)^1_{(g(y),y)} + (Df)^2_{(g(y),y)}\right)\circ\left((Dg)_y\otimes I\right)(\eta) =$$

$Df = Df^1 + Df^2$

$$= (Df)^1_{(g(y),y)}\circ(Dg)_y(\eta) + (Df)^2_{(g(y),y)}(\eta)$$

$$f'_x g' + f'_y = C$$

$$(Df)^2_{(g(y),y)} = -(Df)^1_{(g(y),y)} \circ (Dg)_y \quad \Leftarrow$$

$$(Dg)_y = -[(Df)^1_{(g(y),y)}]^{-1} \circ (Df)^2_{(g(y),y)}$$

$$g' = -(f'_x)^{-1} f'_y \qquad f(g(y),y)=0$$

$$f'_x \cdot g' + f'_y = 0$$

$$g' = -\frac{f'_y}{f'_x}$$

פרק 4: אינטגרציה

למה

כל קבוצה פתוחה $U \subset \mathbb{R}$ יש הצגה יחידה כאיחוד זר של קטעים פתוחים מקסימליים $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$

הוכחה:

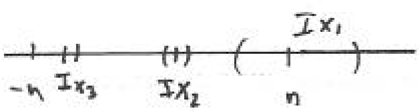
נגדיר לכל $x \in U$ $\quad I_x = \bigcup\{I : x \in I \subset U, \text{קטע פתוח } I\}$

I_x הוא קבוצה לא ריקה (כי U פתוחה ולכן מכילה קטע סביב כל נקודה שלה.)

קל לראות כי I_x גם קטע פתוח.

אם $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ ברור כי $I_x \cup I_y = I_y = I_x$

לכן כל שני קטעים מהצורה I_x זרים זה לזה. כל קטע $[-n,n]$ יכול להכיל רק מספר סופי של קטעים I_x באורך $> \frac{1}{n}$.



ונראה לפי עקרון שובך היונים: k – מספר הקטעים

הנ"ל. לפי שובך היונים – $k \cdot \frac{1}{n} < 2n \Leftarrow k < 2n^2 \Leftarrow k$ סופי.

לכן האוסף $\{I_x : x \in U\}$ הוא בן מניה

נמנה אותם $I_1, I_2 \dots$ $\quad U = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ונקבל את הטענה של הלמה $\boxtimes$

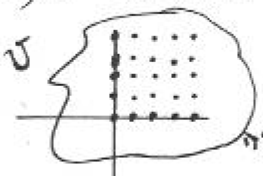
למה

כל קבוצה פתוחה U ב-$\mathbb{R}^n$ הינה איחוד בן מניה של תיבות סגורות

הגדרה – **תיבה** היא קבוצה מהצורה $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ כאשר I_j קטע סופי ב-$\mathbb{R}^1$

תיבה הינה **פתוחה** (סגורה) $\Leftrightarrow$ כל הקטעים המרכיבים הינם פתוחים (סגורים).

הוכחה: יהי לכל $0 \le k$ שלם $\frac{1}{2^k}\mathbb{Z}^n$



לכל $x \in U$ קיים k כך ש-x מוכל בקוביה סגורה המוגדרת ע"י הסריג $\frac{1}{2^k}\mathbb{Z}^n$ המוכלת כולה ב-U

הוכחה באינדוקציה.

כיסוי של E ע"י מספר בן מניה של תיבות $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ כך ש: $\sum v(Q_j) < \varepsilon$

הגדרה: קבוצה $E \subset \mathbb{R}^n$ נקראת קבוצה אפס – אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים